BAB I

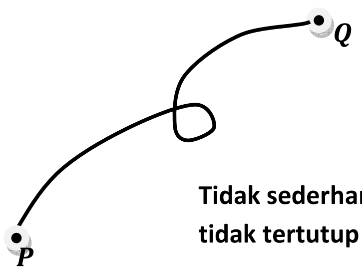
VEKTOR DALAM BIDANG

I. KURVA BIDANG : Penyajian secara parameter

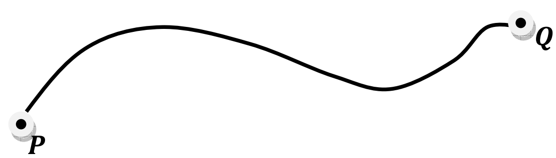
Suatu kurva bidang ditentukan oleh sepasang persamaan parameter.

$x = f(t)$; $y = g(t)$ **dalam I**

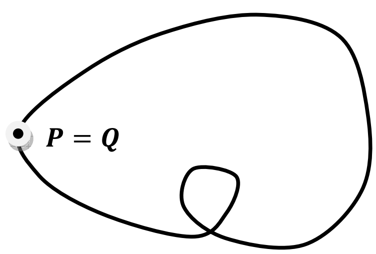
f **dan** g **kontinue pada selang I, yang pada umumnya sebuah selang tertutup** $[a, b]$



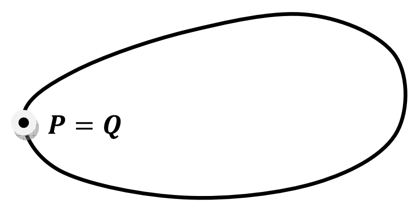
Tidak sederhana, tidak tertutup



Sederhana, tidak tertutup



Tidak sederhana, tertutup



sederhana, tertutup

I.1. Menghilangkan Parameter

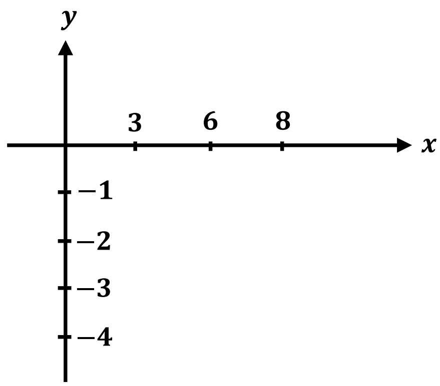
Contoh : Hilangkan parameter t dari persamaan.

$$x = t^2 + 2t\ , \qquad y = t - 3\ , \quad -2 \leq t \leq 3$$

Solusi : $y = t - 3 \quad \rightarrow t = y + 3$

$x = (y+3)^2 + 2(y+3) = y^2 + 8y + 15$

$x + 1 = (y+4)^2 \quad$ → **merupakan persamaan parabola dengan puncak di** $(-1, -4)$.



Contoh : Buktikan bahwa

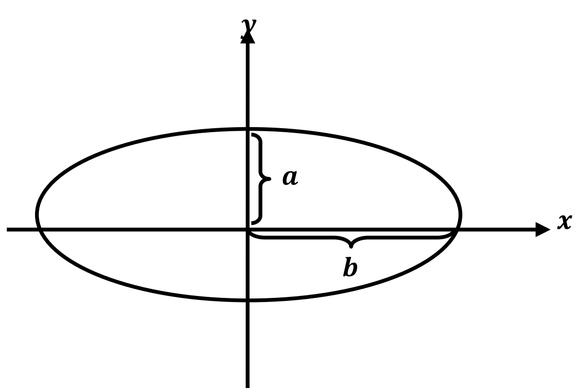
$x = a \cos t \quad , \qquad y = b \sin t \;,\; 0 \leq t \leq 2\pi$

Adalah persamaan ellips

Solusi : $x = a \cos t \quad \rightarrow \cos t = \frac{x}{a}$

$y = b \sin t \quad \rightarrow \sin t = \frac{y}{b}$

$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$



1.2. Kalkulus untuk Fungsi yang Ditentukan dalam bentuk parameter

Andaikan f dan g fungsi-fungsi dari t yang turunannya kontinu dan $f'(t) \neq 0$ pada jelang $\alpha \leq t \leq \beta$. Maka persamaan parameter.

$x = f(t), \quad y = g(t)$

Mendefinisikan y sebagai fungsi dari x dan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

Contoh : Tentukan turunan pertama dan kedua, yaitu $\frac{dy}{dx}$ dan $\frac{d^2y}{dx^2}$, untuk fungsi yang ditentukan oleh :

$x = 5 \cos t \qquad y = 4 \sin t \qquad 0 < t < 3$

Hitung turunan itu untuk $t = \frac{\pi}{6}$

Solusi : Bila $\frac{dy}{dx} = y'$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{4\cos t}{-5\sin t} = \frac{-4}{5} \cot t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{-4/5\, csc^2 t}{-5 \sin t} = \frac{-4}{25} csc^3 t$$

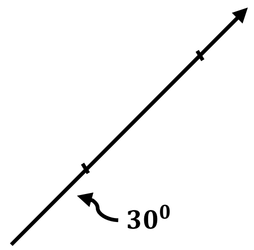
Sehingga untuk $t = \frac{\pi}{6}$, adalah :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4\sqrt{3}}{5} \quad , \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-4}{25}(8) = \frac{-32}{25}$$

II. VEKTOR PADA BIDANG

Scalar : Besaran yang dinyatakan oleh suatu bilangan

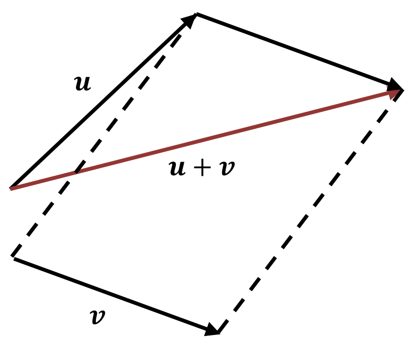
Vektor : Besaran yang dinyatakan oleh suatu bilangan dan arah → digambarkan sebagai anak panah.

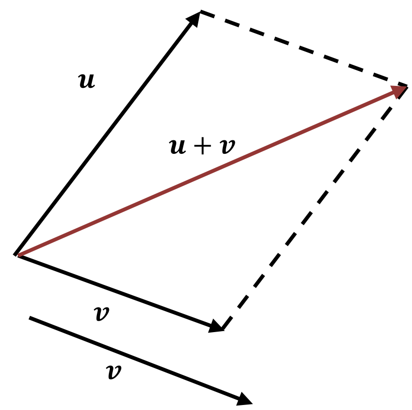


Vektor dapat ditulis dengan huruf tebal $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ atau $\vec{u}$ dan $\vec{v}$.

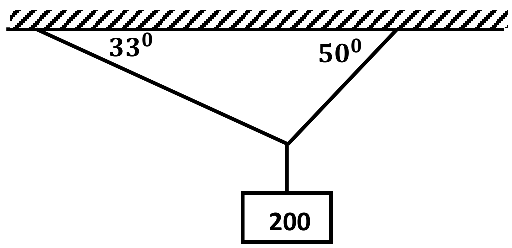
Besarnya vector $\vec{u}$ ditulis dengan $|\boldsymbol{u}|$

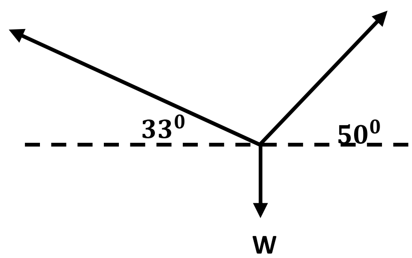
2.1. Operasi Terhadap Vektor





Contoh : Sebuah benda 200 Newton digantungkan pada dua utas kawat. Tentukan besarnya tegangan dalam tiap-tiap kawat.





$$|u|\cos 33^0 = |v|\cos 50^0 \qquad \rightarrow |v| = \frac{|u|\cos 33^0}{\cos 50^0}$$

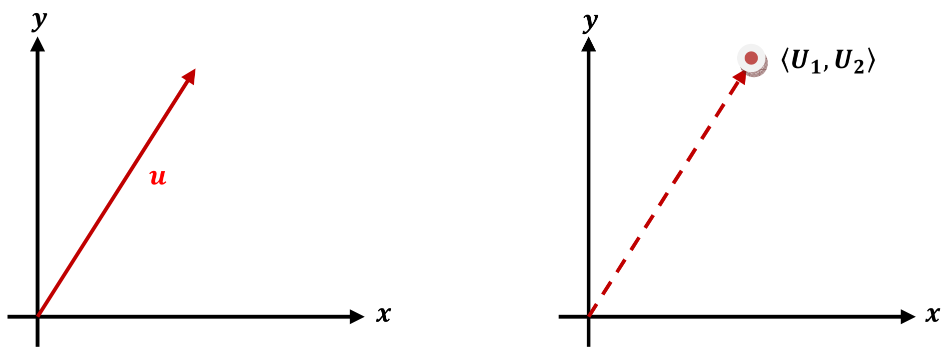
$$|u|\sin 33^0 + |v|\sin 50^0 = |W| = 200$$

$$|u|\ sin\ 33^0 + |u|\frac{cos\ 33^0}{cos\ 50^0} sin\ 50^0 \ = 200$$

$$|u| = \frac{200}{sin\ 33^0 + cos\ 33^0\ tan\ 50^0} = 129,52\ N$$

Sehingga : $|v| = \frac{|u|\ cos\ 33^0}{cos\ 50^0} = 168,99\ N$

3. VEKTOR PADA BIDANG : PENDEKATAN SECARA ALJABAR



Vektor U dapat dinyatakan secara aljabar dengan pasangan terurut $\langle U_1, U_2\rangle$

<u>Operasi Pada Vektor</u>

Bilangan U_1 dan U_2 dinamakan komponen-komponen vector $= \langle U_1, U_2\rangle$. Dua vektor $U = \langle U_1, U_2\rangle$ dan $V = \langle V_1, V_2\rangle$ adalah sama, jika dan hanya jika $U_1 = V_1$ dan $U_2 = V_2$.

Sehingga :

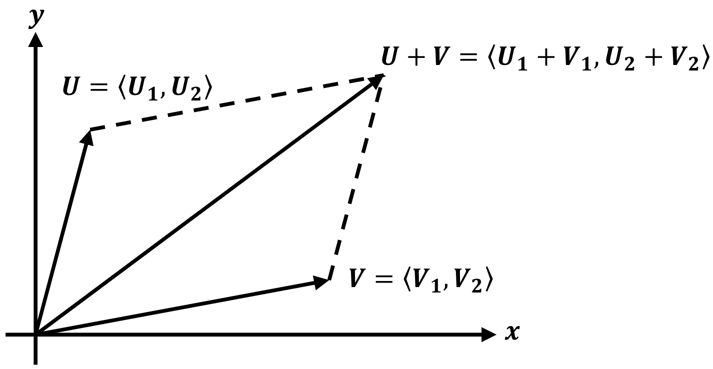
$$U + V = \langle U_1 + V_1, U_2 + V_2\rangle$$

Untuk mengalikan U dengan scalar C adalah

$$UC = CU = \langle CU_1, CU_2 \rangle$$

$$-U = \langle -U_1, -U_2 \rangle$$

$$0 = 0U = \langle 0, 0 \rangle$$



PANJANG DAN HASILKALI TITIK PANJANG

Panjang suatu vektor $|u|$ ditentukan oleh :

$$|u| = \sqrt{U_1{}^2 + U_2{}^2}$$

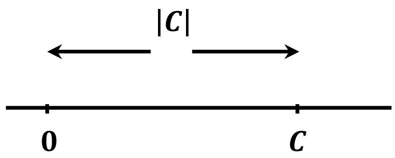
Misal, jika $U = \langle 4, -2 \rangle$, maka $|u| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$

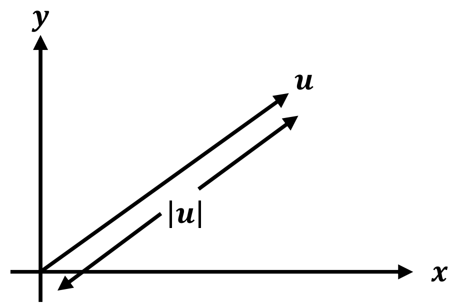
Jika u dikalikan dengan scalar C, maka :

$$|Cu| = |C||u|$$

$|C|$ = nilai mutlak C, jarak antara titik asal dan C pada garis bilangan

$|u|$ = panjang u , jarak antara titik asal dan ujung u pada bidang





Contoh : Bila $U = \langle 4, -3 \rangle$, tentukan $|-2u|$, tentukan pula vektor v yang searah dengan u tetapi dengan panjang 1.

Solusi : $|u| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$ **dan** $|-2u| = |-2||u| = 2x5 = 10$

$$v = \frac{u}{|u|} = \frac{\langle 4, -3 \rangle}{5} = \frac{1}{5}\langle 4, -3 \rangle = \langle \frac{4}{5}, \frac{-3}{5} \rangle$$

Perkalian dua vektor u dan v dinamakan hasil kali titik, yang dilambangkan dengan $u.v$

$$u.v = u_1.v_1 + u_2.v_2$$

Teorema :

Jika u, v dan w vektor dan c skalar, maka :

1. $u.v = v.u$

2. $u.(v + w) = u.v + u.w$

3. $c(u.v) = (cu)v = u(cv)$

4. $0.u = 0$

5. $u.u = |u|^2$

Jika u dan v adalah vektor tidak nol, maka :

$\|u.v = |u||v| cos\,\theta\|$ θ **= sudut antara u dan v**

Dua vektor u dan v tegak lurus jika dan hanya jika $u.v = 0$

Contoh : Tentukan b sehingga $u = \langle 8, 6 \rangle$ dan $v = \langle 3, b \rangle$ tegak lurus.

Solusi : $u.v = (8)(3) + (6)(b) = 24 + 6b = 0$

$$b = -4$$

Contoh : Tentukan sudut antara $u = \langle 8, 6 \rangle$ dan $v = \langle 5, 12 \rangle$

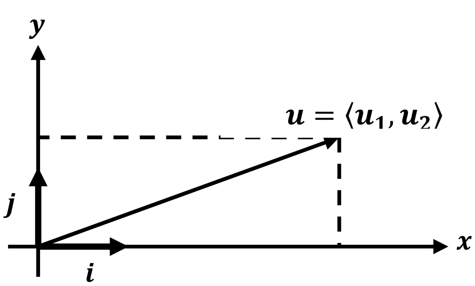
Solusi : $\cos\theta = \frac{u.v}{|u||v|} = \frac{(8)(5)+(6)(12)}{(10)(3)} = \frac{112}{130} = 0,862$

$$\theta = 30,5^0$$

<u>VEKTOR BASIS</u>

Andaikan $i = \langle 1, 0 \rangle$ dan $j = \langle 0, 1 \rangle$ dan perhatikan bahwa vektor-vektor ini tegak lurus dan bahwa panjangnya sama dengan satu. Vektor i dan j ini dinamakan VEKTOR BASIS, sebab setiap vektor $u = \langle u_1, u_2 \rangle$ dapat dinyatakan secara tunggal dengan i dan j yaitu :

$$u = \langle u_1, u_2 \rangle = u_1\langle 1, 0 \rangle + u_2\langle 0, 1 \rangle = u_1 i + u_2 j$$



Contoh : Tentukan besarnya sudut ABC, dengan $A = (4, 3), B = (1, -1)$, dan $C = (6, -4)$

Solusi : $u = \overrightarrow{BA} = (4 - 1)i + (3 + 1)j = 3i + 4j = \langle 3, 4 \rangle$

$v = \overrightarrow{BC} = (6-1)i + (-4+1)j = 5i - 3j = \langle 3, 4 \rangle$

$|u| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$; $|v| = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$

$u.v = (3)(5) + (4)(-3) = 3$

$$cos\ \theta = \frac{u.v}{|u||v|} = \frac{3}{5\sqrt{34}} = 0,1029$$

$$\theta = 84,09^0$$

Andaikan θ sudut antara u dan v. Scalar $|u|cos\ \theta$ dinamakan Proyeksi Skalar u pada v.

Kerja yang dilakukan oleh gaya konstan F yang menggerakkan sebuah benda dari P hingga Q adalah besarnya gaya dalam arah gerak dikalikan dengan jarak yang ditempuh. Jadi apabila D adalah vektor dari P hingga Q, besarnya kerja adalah :

(Proyeksi scalar F pada D) $|D| = |F|cos\ \theta|D|$

Kerja $= F.D$

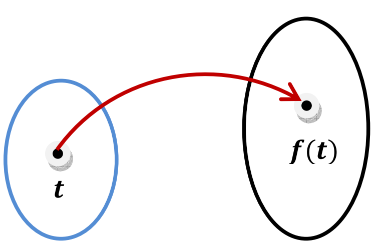
Contoh : Sebuah gaya $F = (80)i + (50)j$ dengan satuan pon memindahkan benda dari $(1,0)$ hingga $(7,1)$. Jarak diukur dengan kaki. Berapakah besarnya…

Solusi : Bila D vektor dari $(1,0)$ hingga $(7,1)$ maka $D = 6i + 7j$, jadi :

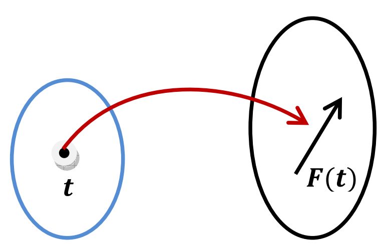
Kerja $= F.D = (80)(6) + (50)(1) = 530$ pon-kaki

4. FUNGSI BERNILAI VEKTOR DAN GERAK SEPANJANG KURVA

Sebuah <u>fungsi f</u> memadankan setiap anggota t dari sebuah himpunan (<u>daerah asal</u>) dengan nilai tunggal $f(t)$ anggota himpunan lain. Himpunan nilai-nilai demikian disebut <u>daerah nilai</u> fungsi f.



Daerah asal **Daerah nilai**



Daerah asal **Daerah nilai**

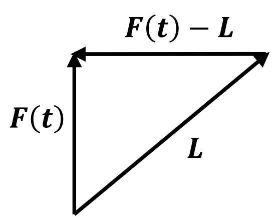
Suatu fungsi $\boldsymbol{F}$ bernilai vektor dengan peubah riil $\boldsymbol{t}$ memadankan tiap bilangan riil $\boldsymbol{t}$ dengan satu vektor $\boldsymbol{F(t)}$. Jadi :

$$\boldsymbol{F(t) = f(t)i + g(t)j = \langle f(t), g(t) \rangle}$$

Missal $\boldsymbol{F(t) = t^2 i + e^t j = \langle t^2, e^t \rangle}$

KALKULUS FUNGSI VEKTOR

$\lim_{t \to c} \boldsymbol{F(t) = L}$ berarti bahwa vector $\boldsymbol{F(t)}$ menuju ke vektor $\boldsymbol{L}$ apabila $\boldsymbol{t}$ menuju $\boldsymbol{c}$ atau vektor $\boldsymbol{F(t) - L}$ menuju vektor 0 apabila $\boldsymbol{t \to c}$.



Definisi :

$\lim_{t \to c} \boldsymbol{F(t) = L}$ berarti bahwa untuk tiap $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$ ada bilangan $\boldsymbol{\delta} > 0$ sedemikian sehingga $|\boldsymbol{F(t) - L}| < \varepsilon$ asal saja dipenuhi $\boldsymbol{0} < |\boldsymbol{t - c}| < \delta$, yaitu :

$$\boldsymbol{0} < |\boldsymbol{t - c}| < \delta \ \to |\boldsymbol{F(t) - L}| < \varepsilon$$

Teorema :

Andaikan $\boldsymbol{F(t) = f(t)i + g(t)j}$. Maka $\boldsymbol{F}$ memiliki limit di $\boldsymbol{c}$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{f}$ dan $\boldsymbol{g}$ memiliki limit di $\boldsymbol{c}$.

$$\lim_{t \to c} \boldsymbol{F(t)} = \left[\lim_{t \to c} \boldsymbol{f(t)}\right] \boldsymbol{i} + \left[\lim_{t \to c} \boldsymbol{g(t)}\right] \boldsymbol{j}$$

Apabila $\boldsymbol{(t) = f(t)i + g(t)j}$, maka

$$\|\boldsymbol{F'(t) = f'(t)i + g'(t)j = \langle f'(t), g'(t) \rangle}\|$$

Contoh : jika $\boldsymbol{F(t) = (t^2 + t)i + e^t j}$, tentukan $\boldsymbol{F'(t), F''(t)}$, dan sudut $\boldsymbol{\theta}$ antara $\boldsymbol{F'(0), F''(0)}$

Solusi : $F'(t) = (2t+1)i + e^t j$ **dan** $F''(t) = 2i + e^t j$ **, jadi :**

$F'(0) = i + j$ **;** $F''(t) = 2i + j$

$$\cos\theta = \frac{F'(0), F''(0)}{|F'(0)||\,F''(0)|} = \frac{(1)(2)+(1)(1)}{\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{2^2+1}} = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{5}}$$

$$\|\theta = 18,43^0\|$$

Teorema :

Andaikan *F* dan *G* fungsi vektor yang dapat dideferensialkan, *h* suatu fungsi bernilai riil yang dapat dideferensialkan dan *c* sebuah scalar. Maka :

1. $D_t[F'(t) + {C_T}'(t)] = F'(t) + {C_T}'(t)$

2. $D_t[cF(t)] = cF'(t)$

3. $D_t[h(t)F(t)] = h(t)F'(t) + h'(t)F(t)$

4. $D_t[F(t) + C_T(t)] = F(t).G'(t) + C_T(t).F'(t)$

5. $D_t[F(h(t))] = F'\big(h(t)\big)h'(t)$ $\rightarrow$ **aturan rantai**

Contoh : Jika $F(t) = t^2 i + e^{-t} j$ **, tentukan**

a). $D_t[t^3F(t)]$; **b).** $\int_0^1 F(t)\, dt$

solusi : a). $D_t[t^3F(t)] = t^3(2ti - e^{-t}j) + 3t^2(t^2 i + e^{-t}j)$

$$= 5t^4 i + (3t^2 - t^3)e^{-t} j$$

b). $\int_0^1 F(t)\, dt = \left(\int_0^1 t^2\, dt\right) i + \left(\int_0^1 e^{-t}\, dt\right) j$

$$= \frac{1}{3} i + (1 + e^{-1}) j$$

GERAK SEPANJANG KURVA

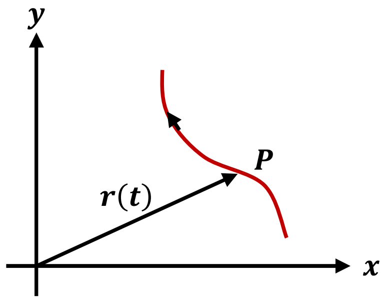
Andaikan *t* menggambarkan waktu dan andaikan koordinat sebuah titik *P* yang bergerak ditentukan oleh persamaan parameter

$$\boldsymbol{x = f(t), \qquad y = g(t)}$$

Maka vektor :

$$\boldsymbol{r(t) = f(t)i + g(t)j}$$

Yang berpangkal dititik asal dinamakan <u>vektor posisi</u> titik *P* pada saat *t* . Apabila *t* berubah ujung vektor $\boldsymbol{r(t)}$ bergerak sepanjang lintasan titik *P*.

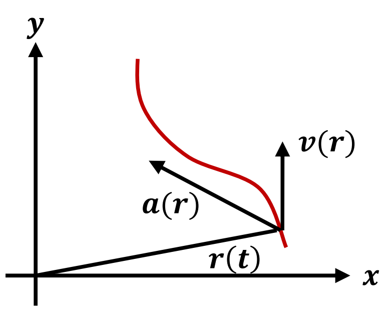


Lintas ini adalah sebuah kurva dan gerak yang dijalani oleh *P* dinamakan <u>gerak sepanjang kurva.</u>

Sejalan dengan gerak linier , maka kecepatan $\boldsymbol{v(t)}$, dan percepatan $\boldsymbol{a(t)}$ titik *P* adalah

$$\boldsymbol{v(t) = r'(t) = f'(t)i + g'(t)j}$$

$$\boldsymbol{g(t) = r''(t) - f''(t)i + g''(t)j}$$



Contoh :

Persamaan parameter sebuah titik *P* yang bergerak pada bidang adalah $x = 3\ cos\ t$ dan $= 2\ sin\ t$, dengan *t* menggambarkan waktu

(a) Gambarlah grafik lintasan *P*.

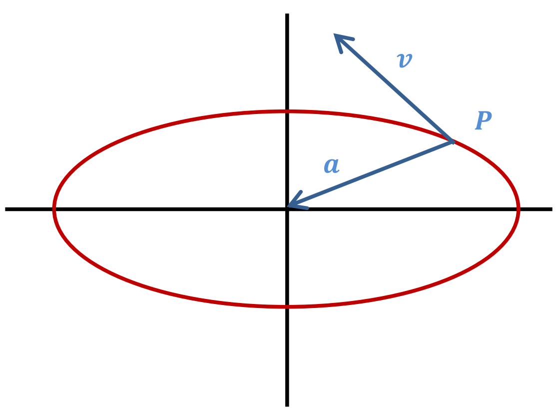
(b) Tentukan rumus untuk kecepatan $v(t)$, laju $|v(t)|$, dan percepatan $a(t)$.

(c) Tentukan nilai maksimum dan minimum laju dan pada saat manakah nilai itu tercapai.

(d) Buktikan bahwa vektor percepatan yang berpangkal di *P* selalu menuju ke titik asal.

Solusi :

(a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ **→ ellips**



(b) Vektor posisi → $r(t) = 3cos\ t\ i + 2sin\ t\ j$

$u(t) = -3sin\ t\ i + 2cos\ t\ j$

$|v(t)| = \sqrt{9sin^2t + 4cos^2t} = \sqrt{5sin^2t + 4}$

$a(t) = -3cos\ t\ i - 2sin\ t\ j$

(c) Karena laju ditentukan oleh → $\sqrt{5sin^2t + 4}$ **, maka nilai maksimum adalah 3 ; pada** $sin\ t = \pm 1$.

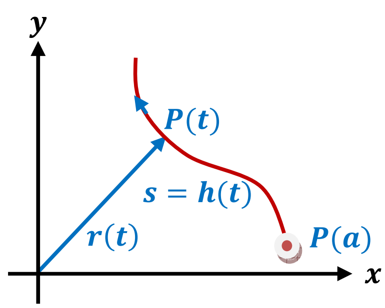
yaitu apabila $t = \pi/2$ atau $3\pi/2$ → yaitu pada titik $(0, \pm 2)$ pada ellips.

Laju minimum, yaitu 2, dicapai pada saat $sin\ t = 0$ yang memberikan titik-titik $(\pm 3, 0)$.

(d) $a(t) = -r(t)$ → bila pangkal $a(t)$ kita ambil di *P*, vektor ini akan mengarah ke ujung akan tepat ada di titik asal. Maka $|a(t)|$ paling besar berada di $(\pm 3, 0)$ dan paling kecil di $(0, \pm 2)$.

5. KELENGKUNGAN DAN PERCEPATAN

Kelengkungan → seberapa tajam sebuah kurva melengkung



Andaikan untuk $a \le t \le b$, $r(t) = f(t)i + g(t)j$ adalah vektor posisi titik $P = P(t)$ pada bidang. Andaikan $r'(t)$ ada dan kontinu dan $r'(t) \neq 0$ pada selang $[a, b]$.

Maka apabila *t* nilainya naik, *P* bergerak sepanjang sebuah kurva yang mulus. Panjang lintasan $s = h(t)$ dari $P(a)$ ke $P(t)$ ditentukan oleh :

$$s = h(t) = \int_a^t \sqrt{[f'(u)]^2 + [g'(u)]^2}\, du = \int_a^t |r'(u)| du$$

Laju titik yang bergerak itu adalah :

$$\frac{ds}{dt} = |r'(u)| = |v(t)|$$

Karena $r'(t) \neq 0$, maka $|v(t)| > 0$ → *s* naik bila *t* naik

Dengan Teorema fungsi balikan, $\boldsymbol{s = h(t) \to t = h^{-1}(s)}$

$$\boldsymbol{\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{|v(t)|}}$$

Andaikan *T(t)* disebut vector singgung satuan di *P(t)*

$$\boldsymbol{\left\| T(t) = \left|\frac{dT}{ds}\right| = \frac{|T'(t)|}{|v(t)|} \right\|}$$

Contoh : Tentukan kelengkungan dan radius kelengkungan hiposikloid $\boldsymbol{r = 8cos^3 t\ i + 8sin^3 t\ j}$ **di titik** $\boldsymbol{P}$ **dengan** $\boldsymbol{t = \pi/12}$

Solusi : untuk $\boldsymbol{0 < t < \pi/2}$

$$\boldsymbol{v(t) = r'(t) = -24cos^2 t\ sin\ t\ i + 24sin^2 t\ cos\ t\ j}$$

$$\boldsymbol{|v(t)| = 24\ sin\ t\ cos\ t}$$

$$\boldsymbol{T(t) = -cos\ t\ i + sin\ t\ j}$$

$$\boldsymbol{T'(t) = sin\ t\ i + sin\ t\ j}$$

$$\boldsymbol{K(t) = \frac{|T'(t)|}{|v(t)|} = \frac{|sin\ t\ i + cos\ t\ j|}{24\ sin\ t\ cos\ t} = \frac{1}{24\ sin\ t\ cos\ t}}$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{12\ sin\ 2t}}$$

$$\boldsymbol{K(\pi/12) = \frac{1}{12.\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} \to R(\pi/12) = 6}$$