BAB II
PROBABILITAS

2.1. Ruang sampel (sample space)

Data diperoleh baik dari pengamatan kejadian yang tak dapat dikendalikan atau dari percobaan yang dikendalikan dalam laboratorium. Untuk penyederhanaan digunakan istilah **eksperimen (percobaan)** yang didefinisikan sebagai suatu proses dimana suatu pengamatan (atau pengukuran) dicatat.

Himpunan dari semua titik sampel untuk suatu eksperimen disebut **ruang sampel** dan dinyatakan dengan simbol *S*. Setiap hasil dalam ruang sampel dinamakan **elemen** atau **anggota** ruang sampel atau **titik sampel**.

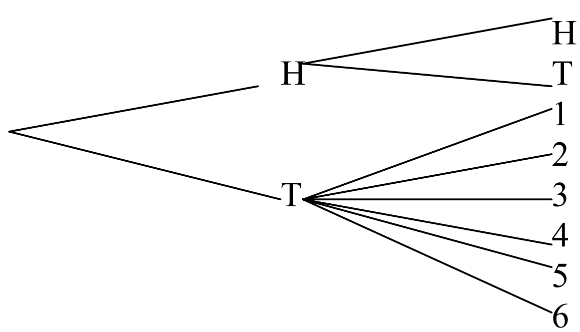
Contoh ruang sampel *S* dari kemungkinan hasil bila suatu koin dilemparkan adalah:

S = {H,T}; dimana H = head (depan); T = tails (belakang)

Contoh ruang sampel *S* dari dadu yang dilemparkan adalah: S = {1,2,3,4,5,6}

Pada beberapa eksperimen elemen dari ruang sample dibuat dalam bentuk **diagram pohon**. Misalkan, koin di lemparkan, bila hasilnya adalah Head, maka koin dilemparkan lagi. Namun bila hasilnya tails, maka dadu dilemparkan satu kali. Elemen diatas dapat digambarkan dalam diagram pohon sbb:

Hasil pertama *hasil kedua* *titik sampel*



HH
HT
T1
T2
T3
T4
T5
T6

S = {HH,HT,T1,T2,T3,T4,T5,T6}

2.2 Peristiwa (*event*)

Lemparkan sebuah dadu dan amati angka yang tampil pada permukaan atasnya. Beberapa peristiwa (event) adalah sebagai berikut:

Peristiwa A: bilangan ganjil

Peristiwa B: sebuah angka yang kurang dari 4

Peristiwa E_1: angka 1

Peristiwa E_2: angka 2

Peristiwa E_3: angka 3

Peristiwa E_4: angka 4

Peristiwa E_5: angka 5

Peristiwa E_6: angka 6

Sebuah peristiwa yang tidak dapat diuraikan disebut peristiwa sederhana. Peristiwa-peristiwa sederhana dinyatakan dengan simbol *E* dengan sebuah subcript.

Sebuah **peristiwa (*event*)** adalah sebuah kumpulan khusus dari titik-titik sampel.

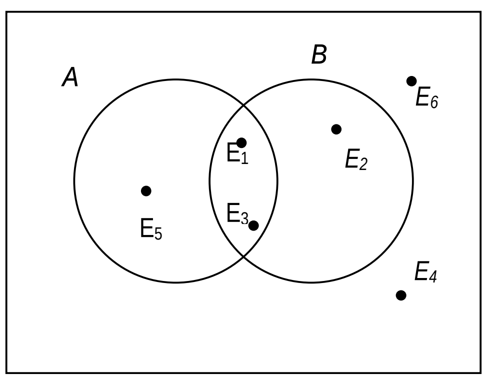


Diagram venn: peristiwa A dan B dari lemparan dadu

2.3 Probabilitas dari sebuah peristiwa

Jika sebuah eksperimen diulangi sebanyak N kali dalam jumlah yang besar dan peristiwa A terlihat n_A kali, maka probilitas dari A adalah:

$$P(A) = \frac{n_A}{N}$$

Dalam contoh lemparan dadu, bila kita lakukan populasi besar lemparan dadu, maka bilangan 1,2,3,4,5, dan 6 seharusnya tampil mendekati frekuensi relatif yang sama, karena itu:

$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = P(E_4) = P(E_5) = P(E_6) = 1/6$$

Untuk setiap titik dalam ruang sampel kita tetapkan sebuah bilangan yang disebut probabilitas dari E_i, yang dinyatakan oleh simbol $P(E_i)$, sehingga:

1. $0 \le P(E_i) \le 1,$ untuk semua i
2. $\sum_{s} P(E_i) = 1$

dimana simbol $\sum_{s}$ berarti jumlah dari probabilitas titik sampel atas semua titik sampel di S.

Probabilitas dari suatu peristiwa A sama dengan jumlah dari probabilitas titik-titik sampel di A.

Contoh: hitung probabilitas dari peristiwa A (bilangan ganjil) untuk eskperimen lemparan dadu.

$$P(A) = P(E_1) + P(E_3) + P(E_5) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$$

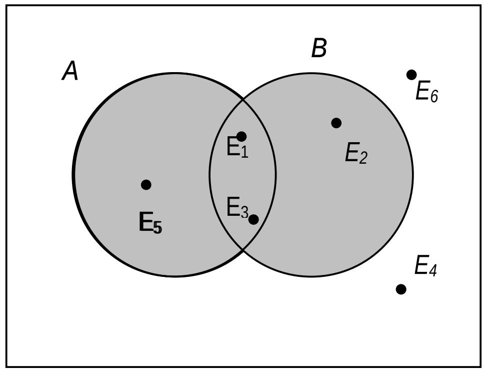
Kasus: manajer personalia akan memilih dua orang tenaga kerja terbaik dari 4 pelamar;

a. berapa probabilitas bahwa ia memilih dua calon terbaik
b. berapa probabilitas bahwa ia memilih paling tidak satu dari dua calon terbaik.

2.4 Peristiwa majemuk (ganda)

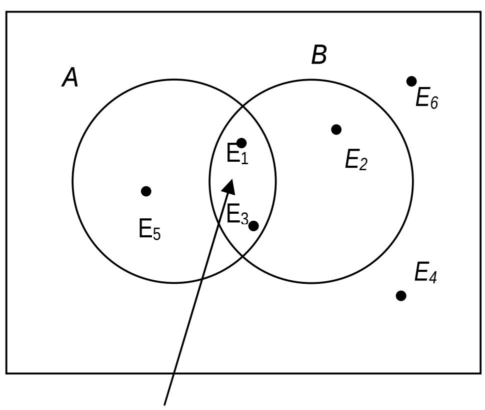
Misalkan A dan B adalah dua peristiwa dalam ruang sampel S. **Gabungan**

(Union) dari A dan B adalah peristiwa yang memuat semua titik-titik sampel di A atau di B atau kedua-duanya. Gabungan dari A dan B dinyatakan dengan simbol $A \cup B$.



Peristiwa $A \cup B$

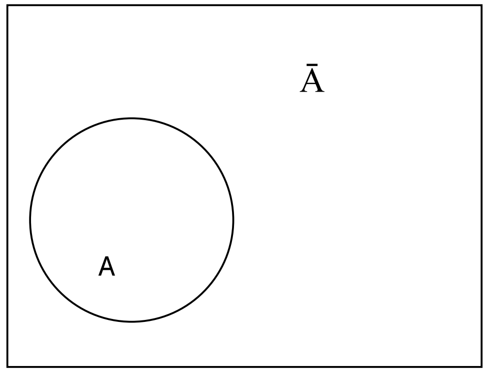
Misalkan A dan B adalah dua peristiwa dalam ruang sampel S. **perpotongan (Intersection)** dari A dan B adalah peristiwa yang disusun oleh semua titik-titik yang terletak di keduanya. Suatu perpotongan (irisan) dari peristiwa A dan B diwakili oleh simbol AB atau simbol $A \cap B$.



Peristiwa $A \cap B$

2.5 Hubungan peristiwa

Pelengkap atau komplemen dari suatu peristiwa adalah himpunan semua titik-titik sampel yang ada dalam ruang sampel S tetapi tidak di A. Pelengkap (komplemen) dari A dinyatakan dengan simbol Ā



Peristiwa komplementer

$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A})$

Probabilitas bersyarat (conditional probability) dari B, karena A telah terjadi adalah: $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$

Probabilitas bersyarat dari A, karena B telah terjadi adalah: $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$

Contoh: hitung $P(A|B)$ untuk percobaan lemparan dadu seperti sebelumnya;

Peristiwa A = bilangan ganjil

Peristiwa B = bilangan kurang dari 4

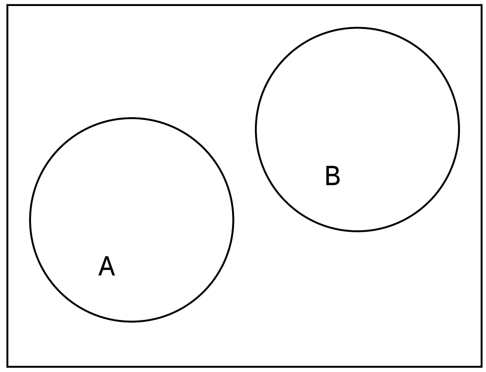
$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1/3}{1/2} = 2/3$$

Dua peristiwa A dan B dikatakan **bebas (independen)** jika:

$$P(A|B) = P(A) \qquad \text{dan} \qquad P(B|A) = P(B)$$

Kalau tidak, peristiwa disebut **tergantung (dependent)**

Dua peristiwa A dan B adalah **saling lepas (mutually exclusive)** jika peristiwa AB tidak mengandung titik-titik sampel.



Peristiwa-peristiwa yang saling lepas

2.6 Dua Hukum probabilitas

Hukum Perkalian probabilitas: Jika diketahui dua peristiwa A dan B, maka probabilitas dari irisan perpotongan AB adalah:

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

Jika A dan B bebas, maka $P(AB) = P(A)P(B)$

Contoh: Sebuah toko menerima 100 buah televisi dari sebuah pabrik. 10 dari 100 televisi mengalami kerusakan. Jika 2 televisi dipilih secara acak dari 100 televisi, berapakah probabilitas kedua-duanya rusak.

Solusi:

Peristiwa A = TV pertama rusak. Peristiwa B = TV kedua rusak.

Maka AB adalah peristiwa dimana kedua-duanya rusak.

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

P(A) = 0,10 karena 10 yang rusak dari sejumlah 100. Tetapi, $P(B|A) = 9/99$ karena setelah yang pertama dipilih dan ternyata rusak, terdapat 99 yang masih tinggal dan diantaranya 9 yang rusak. Maka:

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = \left(\frac{10}{100}\right)\left(\frac{9}{99}\right) = \frac{1}{110}$$

Hukum Pertambahan dari probabilitas:

Probabilitas suatu gabungan A $\cup$ B adalah:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Jika A dan B saling lepas (mutually exclusive), maka

P(AB) = 0 dan $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Contoh: Sebuah terbitan Sinar harapan melaporkan bahwa 40% dari pelanggannya secara teratur membaca majalah Tempo, dan 32% membaca majalah Time, dan 11% membaca keduanya. Bila kita tentukan:

Peristiwa A = pelanggan sinar harapan yang membaca Tempo

Peristiwa B = pelanggan sinar harapan yang membaca Time

Carilah probabilitas dari peristiwa A, B, AB, dan A $\cup$ B

Solusi:

P(A) = 0,4 P(B) = 0,32 P(AB) = 0,11

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}40 + 0{,}32 - 0{,}11 = 0{,}61$$

2.7 Hukum Bayes

Misalkan B adalah suatu peristiwa dan $\overline{B}$ adalah pelengkap (komplemen)nya, jika peristiwa lain A terjadi, maka:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B})}$$

$P(B|A)$ disebut probabilitas kemudian (posterior) dari peristiwa B karena adanya informasi yang dikandung dalam peristiwa A. Probabilitas tak bersyarat *P(B)* dan $P(\overline{B})$ disebut probabilitas awal (prior).

Contoh:

Manajer kredit telah mengusulkan bahwa akan datang pemberian kredit akan dihentikan bagi pelanggan yang telah dua kali terlambat seminggu atau lebih. Catatan kredit menunjukkan 90% dari semua yang menunggak telah menunggak paling sedikit dua bulan angsuran. 2% pelanggan tidak melunasi hutang kreditnya. 45% dari yang lancar, paling tidak pernah 2 kali terlambat melunasi angsuran. Carilah probabilitas bahwa seorang pelanggan dengan 2 kali atau lebih terlambat membayar angsuran akan benar-benar melalaikan pembayarannya.

Solusi:

Misalkan peristiwa L dan D didefinikasan sebagai berikut:

Peristiwa L : pelanggan kredit dua minggu atau lebih terlambat dengan paling sedikit dua pembayaran angsuran bulanan.

Peristiwa D : pelanggan kredit telah macet membayar hutangnya.

$$P(D|L) = \frac{P(DL)}{P(L)} = \frac{P(L|D)P(D)}{P(L|D)P(D) + P(L|\overline{D})P(\overline{D})}$$

$$P(D|L) = \frac{(0{,}90)(0{,}02)}{(0{,}90)(0{,}20) + (0{,}45)(0{,}98)} = 0{,}0392$$

2.8 Menghitung titik-titik sampel

Dengan *m* elemen (unsur) $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_m$ dan *n* elemen $b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots, b_n$ adalah mungkin membentuk pasangan *mn* yang mengandung satu elemen dari setiap kelompok.

Contoh dua dadu dilempar. Berapa banyak titik-titik sampel yang berkaitan dengan eksperimen.

Solusi: $N = mn = 36$

Suatu pengaturan yang berurutan dari *r* obyek yang berlainan dinamakan **permutasi**. Jumlah cara menyusun *n* obyek yang berbeda dengan mengambil *r* pada saat yang sama dinyatakan dengan simbol P_r^n.

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ingat→ $n!$ = n(n-1) (n-2).....(3)(2)(1) 0! = 1

Contoh: tiga tiket undian ditarik dari 50 tiket. Asumsikan bahwa urutannya adalah penting. Berapa banyak titik-titik sampel yang berkaitan dengan eksperimen ini.

Solusi:

$$P_3^{50} = \frac{50!}{(50-3)!} = 117.600$$

Kasus: Suatu peralatan terdiri dari lima bagian yang dapat dirakit dalam sebarang urutan. Jika setiap urutan dicoba satu kali, berapa banyak uji coba yang harus dilakukan?

Jumlah **kombinasi** dari *n* obyek dengan pengambilan *r* pada waktu yang sama dinyatakan oleh simbol C_r^n

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Contoh: sebuah radio dapat dibeli dari lima toko penyalur. Dengan berapa cara dapat dipilih tiga toko dari lima yang ada?

$$C_3^5 = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

SOAL:

Masalah penurunan rangka baja digambarkan pada gambar berikut:

A dan B adalah pondasi. Setiap pondasi mungkin tetap berada pada posisinya atau turun 5 cm. Probabilitas masing-masing pondasi turun adalah 0,1. Probabilitas satu pondasi turun bila pondasi yang lain turun adalah 0.8.

a. tentukan kemungkinan yang terjadi pada dua pondasi tsb

b. Probabilitas terjadinya penurunan

c. Probabilitas terjadinya pondasi tsb penurunannya berbeda