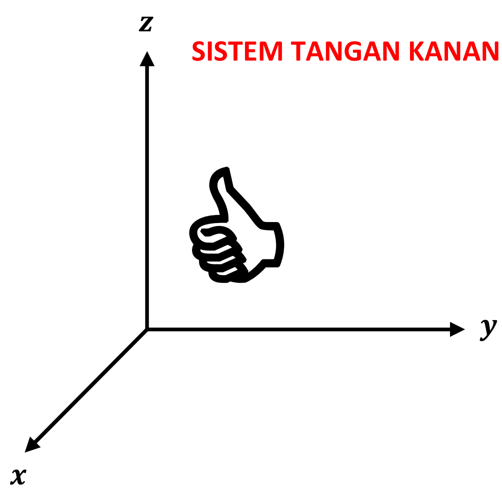
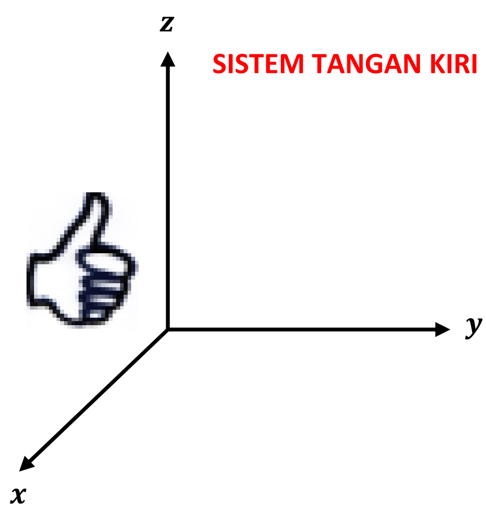
BAB II

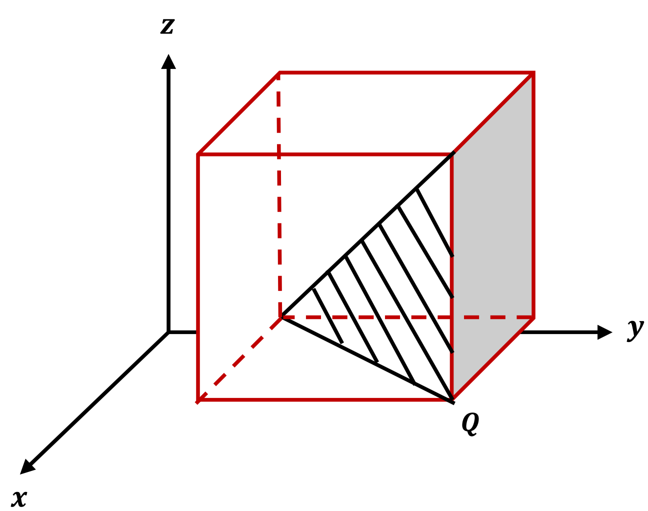
VEKTOR DAN GERAK DALAM RUANG

1. KOORDINAT CARTESIUS DALAM RUANG DIMENSI TIGA





RUMUS JARAK



$P_1 \quad \rightarrow (x_1, y_1, z_1)$

$P_2 \quad \rightarrow (x_2, y_2, z_2)$

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Contoh : Carilah jarak antara titik $P\ (2, -3, 4)$ dan $Q\ (-3, 2, -5)$.

Solusi : $|PQ| = \sqrt{(-3-2)^2 + (2+3)^2 + (-5-4)^2} = \sqrt{132} = 11,45$

Persamaan baku sebuah bola

Jika (x, y, z) pada bola dengan radius r berpusat pada (h, k, l), maka :

$$\left\|(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2\right\|$$

atau dalam bentuk terurai dapat ditulis sebagai

$$x^2 + y^2 + z^2 + C_T x + Hy + Iz + J = 0$$

Contoh : Carilah pusat dan radius bola dengan persamaan :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 8y - 12z + 68 = 0$$

Solusi :

$$(x^2 - 10x + \cdots) + (y^2 - 8y + \cdots) + (z^2 - 12z + \cdots) = -68$$

$$(x^2 - 10x + 25) + (y^2 - 8y + 16) + (z^2 - 12z + 36) = -68 + 25 + 16 + 36$$

$$(x-5)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 9$$

$\therefore$ **Pusat bola $(5, 4, 6)$; radius $= 3$**

GRAFIK DALAM RUANG DIMENSI TIGA

Contoh : Gambarkanlah grafik dari $3x + 4y + 2z = 12$

Solusi : Perpotongan dengan sumbu $x \rightarrow$ ambil y & $z = 0$

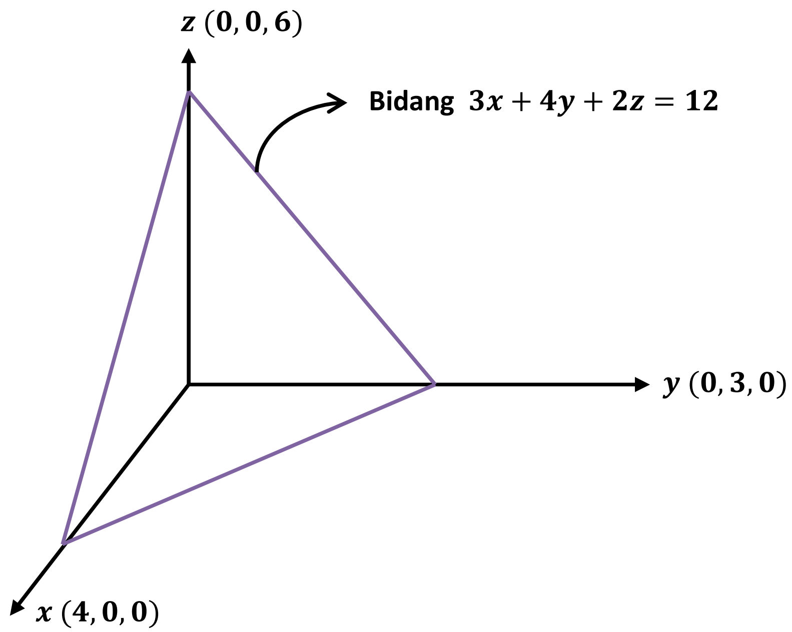
$$3x = 12 \ \rightarrow x = 4 \ \rightarrow (4, 0, 0)$$

Perpotongan dengan sumbu $y \rightarrow$ ambil x & $z = 0$

$4y = 12 \quad \rightarrow y = 3 \quad \rightarrow (0, 3, 0)$

Perpotongan dengan sumbu z

$2z = 12 \quad \rightarrow z = 6 \quad \rightarrow (0, 0, 6)$



2. VEKTOR DALAM RUANG DIMENSI TIGA

$u = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle = u_1 i + u_2 j + u_3 k$

i, j, k adalah vektor satuan baku → disebut vektor basis. Panjang u, diberikan sbb:

$$\left\| |u| = \sqrt{u_1{}^2 + u_2{}^2 + u_3{}^2} \right\|$$

Bila $u = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ dan $v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$; maka

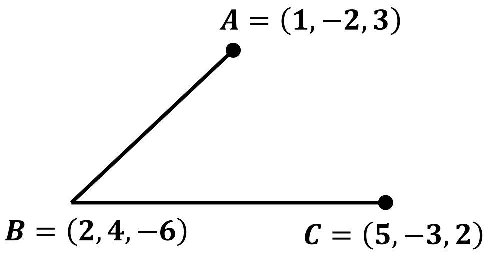
$$\|u.v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3\|$$

dan

$$\|u.v = |u||v| \cos\theta\|$$

Contoh :

Cari sudut ABC jika $A = (1, -2, 3), B = (2, 4, -6)$ dan $C = (5, -3, 2)$



Vektor $u = \overrightarrow{BA}$

Vektor $v = \overrightarrow{BC}$

$u = \langle 1 - 2, -2 - 4, 3 + 6 \rangle = \langle -1, -6, 9 \rangle$

$v = \langle 5 - 2, -3 - 4, 2 + 6 \rangle = \langle 3, -7, 8 \rangle$

$$\cos\theta = \frac{u.v}{|u||v|} = \frac{(-1)(3)+(-6)(-7)+(3)(8)}{\sqrt{1+36+81}\ x\ \sqrt{9+49+64}} = 0,9521$$

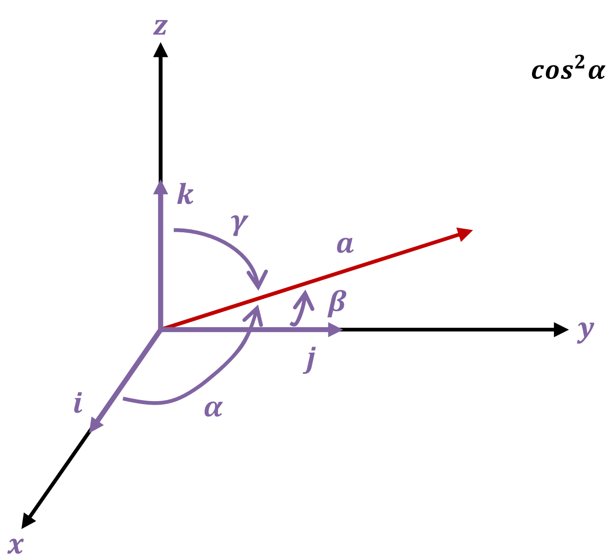
$$\theta = 22,31^0$$

❖ SUDUT DAN KOSINUS ARAH

Sudut antara vektor a yang tak nol dengan vektor satuan i, j, k disebut sudut-sudut arah vektor a

Jika $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ **, maka :**

$$\cos\alpha = \frac{a.i}{|a||i|} = \frac{a_1}{|a|}\ ;\ \cos\beta = \frac{a_2}{|a|}\ ;\ \cos\gamma = \frac{a_3}{|a|}$$



$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Contoh : Cari sudut-sudut arah vektor $\boldsymbol{a = 4i + 5j + 3k}$

Solusi : $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 3^2} = 5\sqrt{2}$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{5} \;\; ; \;\; \cos\beta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \; ; \; \cos\gamma = \frac{3\sqrt{2}}{10}$$

$$\alpha = 55,55^0 \quad \beta = 135^0 \quad \gamma = 64,90^0$$

Contoh : Cari vektor yang panjangnya 5 satuan yang mempunyai $\alpha = 32^0$, $\beta = 100^0$

Solusi : $\cos^2\gamma = 1 - \cos^2 32^0 - \cos^2 100^0 = 0,25066$

$$\cos\gamma = \pm 0,50066$$

Vektor yang memenuhi persyaratan :

$$5\langle \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \rangle = 5\langle 0,84805 \, , -0,17365 \, , \pm 0,50066\rangle$$

$$= \langle 4,2403 \, , -0,8683 \, , 2,5033\rangle \text{ dan}$$

$$\langle 4,2403 \, , -0,8683 \, , -2,5033\rangle$$

❖ BIDANG

Bila $\boldsymbol{n} = \langle A, B, C\rangle$ adalah sebuah vektor tak nol tetap dan $P_1(x_1, y_1, z_1)$ adalah titik tetap. Himpunan semua titik $P(x, y, z)$ yang memenuhi $\overrightarrow{P_1P}.\boldsymbol{n} = 0$ adalah BIDANG yang melalui P_1 dan tegak lurus $\boldsymbol{n}$.

$$\overrightarrow{P_1P} = \langle x - x_1, y - y_1, z - z_1\rangle$$

Maka, $\overrightarrow{P_1P}.\boldsymbol{n} = 0$ setara terhadap

$$\|A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0\|$$

Persamaan ini (paling sedikit salah satu A,B,C tidak nol) disebut bentuk baku persamaan bidang.

Persamaan diatas dapat disederhanakan menjadi :

$$\boldsymbol{A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0}$$

$$\boldsymbol{Ax+By+Cz=D, \quad A^2+B^2+C^2 \neq 0}$$

Contoh:

Cari persamaan bidang yang melalui $(5,1,-2)$ tegak lurus terhadap $\boldsymbol{n} = \langle 2,4,3\rangle$. Kemudian cari sudut antara bidang ini dan bidang yang persamaannya $3x-4y+7z=5$

Solusi : $\boldsymbol{2(x-5)+4(y-1)+3(z+2)=0}$

$$\boldsymbol{2x+4y+3z=8}$$

Vektor $\boldsymbol{m}$ $\perp$ terhadap bidang kedua adalah $\boldsymbol{m} = \langle 3,-4,7\rangle$. Sudut $\boldsymbol{\theta}$ antara dua bidang tersebut adalah :

$$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{m.n}{|m||n|} = \frac{(3)(2)+(-4)(4)+(7)(3)}{\sqrt{9+16+49}\ x\ \sqrt{4+16+9}} = 0,2375}$$

$$\boldsymbol{\theta = 76,26^0}$$

3. HASIL KALI SILANG

Hasil kali silang (hasil kali vektor atau cross product), $\boldsymbol{u\ x\ v}$ untuk $\boldsymbol{u} = \langle \boldsymbol{u_1,u_2,u_3}\rangle$ dan $\boldsymbol{v} = \langle \boldsymbol{v_1,v_2,v_3}\rangle$ didefinisikan sebagai

$$\boldsymbol{\|u\ x\ v = \langle u_2v_3-u_3v_2, u_3v_1-u_1v_3, u_1v_2-u_2v_1\rangle\|}$$

Untuk memudahkan, gunakan pengertian determinan

$$\boldsymbol{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Dengan determinan,

$$\boldsymbol{u\ x\ v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} k$$

$\|u\ x\ v = -(v\ x\ u)\|$ → **hukum anti komutatif**

Contoh : Andaikan $u = \langle 1, -2, -1 \rangle$ **dan** $v = \langle -2, 4, 1 \rangle$

Hitunglah $u\ x\ v$ **dan** $v\ x\ u$ **menggunakan definisi determinan**

Solusi :

$$v\ x\ u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -2i - j + 0k$$

$$u\ x\ v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2i + j + 0k$$

Teorema :

Andaikan u **dan** v **vektor-vektor dalam ruang dimensi tiga dan** θ **sudut antara mereka, Maka :**

1. $u.(u\ x\ v) = 0 = v.(u\ x\ v) \rightarrow u\ x\ v \perp$ **terhadap** u, v

2. $|u\ x\ v| = |u||v|\ sin\ \theta$

3. **Dua vektor** u **dan** v **dalam ruang dimensi tiga adalah sejajar jika dan hanya jika** $u\ x\ v = 0$

Contoh : Cari persamaan bidang yang melalui tiga titik

$$P_1(1, -2, 3), P_2(4, 1, -2), P_3(-2, -3, 0)$$

Solusi :

$$u = \overrightarrow{P_2P_1} = \langle -3, -3, 5 \rangle \text{ dan } v = \overrightarrow{P_2P_3} = \langle -6, -4, 2 \rangle$$

Maka,

$$u \; x \; v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & -3 & 5 \\ -6 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 14i + 24j - 6k$$

Bidang yang melalui $(4, 1, -2)$ dengan normal $14i + 24j - 6k$ mempunyai persamaan :

$$14(x - 4) + 24(y - 1) - 6(z + 2) = 0$$

atau

$$14x + 24y - 6z = 44$$

❖ SIFAT-SIFAT ALJABAR

TEOREMA :

Jika u, v dan w adalah vektor dalam ruang dimensi tiga dan k skalar, maka :

1. $u \; x \; v = -(v \; x \; u)$

2. $u \; x \; (v + w) = (u \; x \; v) + (u \; x \; w)$

3. $k(u \; x \; v) = (ku) x \; v = u \; x \; (kv)$

4. $u \; x \; 0 = 0 \; x \; u = 0$

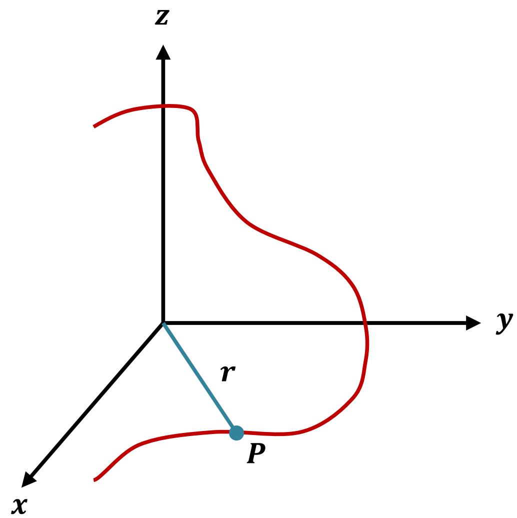
5. $(u \; x \; v) \; x \; w = u(v \; x \; w)$

6. $u \; x \; (v \; x \; w) = (u \; x \; w)v - (u \; x \; v)w$

4. Garis dan Kurva dalam Ruang Dimensi Tiga

Suatu kurva ruang ditentukan oleh suatu tiga persamaan parameter,

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \quad t \in I$$

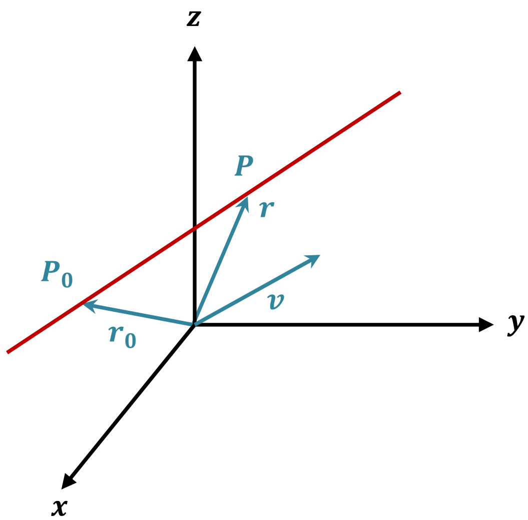


f, g, h → **kontinue pada selang I**

Suatu kurva dinyatakan dengan cara memberikan vektor posisi $r = r(t)$ **dari suatu titik** $P = P(t)$.

$$r = r(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle = f(t)i + g(t)j + h(t)k$$

❖ **GARIS**



garis ditentukan oleh suatu titik tetap P_0 **dan suatu vector** $v = ai + bj + ck$.

Garis adalah himpunan semua titik P **sedemikian sehingga** $\overrightarrow{P_0P}$ **adalah sejajar terhadap** v,

$\overrightarrow{P_0P} = tv$; $t =$ **bilangan riil**

$r = \overrightarrow{OP}$ **dan** $r_0 = \overrightarrow{OP_0}$ → $r = r_0 + tv$

Bila $r = \langle x, y, z\rangle$ **dan** $r_0 = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$

$$\|x = x_0 + at, y = y_0 + bt, z = z_0 + ct\|$$

Merupakan **persamaan parameter** **dari garis melalui** (x_0, y_0, z_0) **dan sejajar** $v = \langle a, b, c\rangle$; a, b, c → **bilangan-bilangan arah**

Contoh : Cari persamaan parameter untuk garis yang melalui $(3, -2, 4)$ dan $(5, 6, -2)$

Solusi :

$$v = \langle 5-3, 6+2, -2-4 \rangle = \langle 2, 8, -6 \rangle$$

Pilih (x_0, y_0, z_0) sebagai $(3, -2, 4)$, maka persamaan parameter :

$$x = 3 + 2t\,, \quad y = -2 + 8t\,, \qquad z = 4 - 6t$$

$t = 0 \rightarrow (3, -2, 4)$

$t = 1 \rightarrow (5, 6, -2)$

<u>Persamaan simetris</u> garis yang melalui (x_0, y_0, z_0) dengan bilangan arah a,b,c → yakni :

$$\left\| \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \right\|$$

Persamaan tersebut merupakan konjungsi dari dua persamaan

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \text{ dan } \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Contoh : Cari persamaan simetri dari garis yang sejajar vektor $(4, -3, 2)$ dan melalui $(2, 5, -1)$

Solusi : $\frac{x-2}{4} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z+1}{2}$

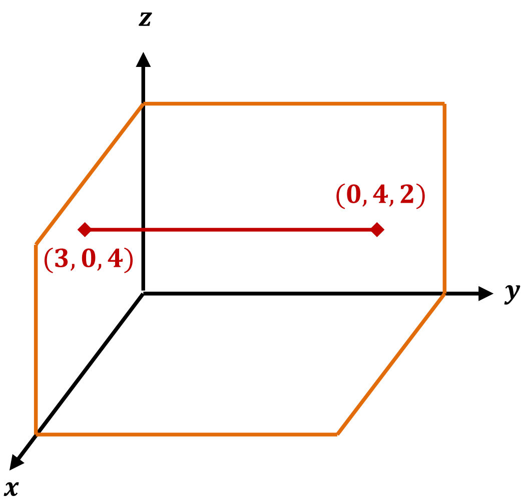
Contoh : Cari persamaan simetri dari garis potong bidang-bidang $2x - y - 5z = -14$ dan $4x + 5y + 4z = 28$

Solusi : pilih garis menembus bidang yz dan xz

$x = 0 \rightarrow -y - 5z = -14$ **dan** $5y + 4z = 28$

Menghasilkan titik (0,4,2)

$$\left.\begin{aligned} y = 0 \rightarrow 2x - 5z &= -14 \\ 4x + 4z &= 28 \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{titik } (3, 0, 4)$$



vektornya adalah :

$\langle 3-0, 0-4, 4-2\rangle = \langle 3, -4, 2\rangle$

Dengan menggunakan (3,0,4) untuk

(x_0, y_0, z_0) **diperoleh :**

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-0}{-4} = \frac{z-4}{2}$$

Contoh : Cari persamaan simetri atau persamaan parameter dari garis yang melalui (1,-2,3) yang tegaklurus terhadap sumbu x dan garis

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{5}$$

Solusi : Sumbu x dan garis yang diberikan arah $\boldsymbol{u} = \langle 1, 0, 0\rangle$ **dan** $\boldsymbol{v} = \langle 2, -1, 5\rangle$

Suatu vektor yang tegak lurus terhadap $\boldsymbol{u}$ **dan** $\boldsymbol{v}$ **:**

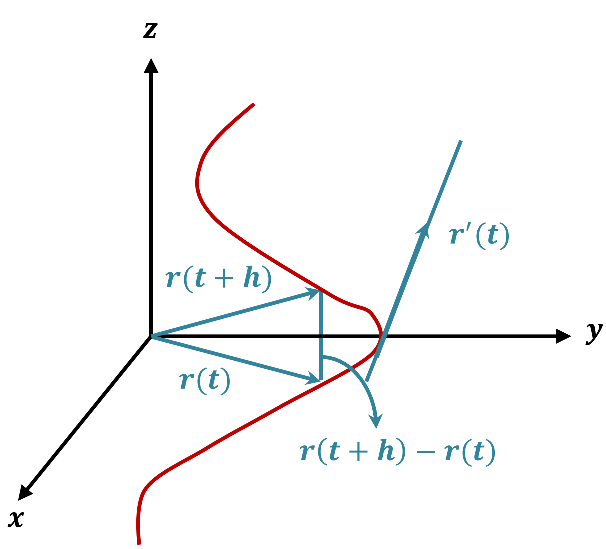
$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$$

Garis yang disyaratkan adalah sejajar terhadap $\langle 0, -5, -1\rangle$

Persamaan parameter :

$$x = 1\ , y = -2 + 5t\ , z = 3 + t$$

❖ GARIS SINGGUNG PADA KURVA



$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{f}(t)\boldsymbol{i} + \boldsymbol{g}(t)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{h}(t)\boldsymbol{k}$$

$\boldsymbol{r}$ **= vektor posisi**

$\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{f}'(t)\boldsymbol{i} + \boldsymbol{g}'(t)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{h}'(t)\boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{f}'(t), \boldsymbol{g}'(t)$, **dan** $\boldsymbol{h}'(t)$ **adalah bilangan-bilangan singgung pada *P***

Contoh : Cari persamaan simetrik untuk garis singgung pada P

$$r(t) = ti + \frac{1}{2}t^2 j + \frac{1}{3}t^3 k$$

di $P(2) = (2, 2, 8/3)$

Solusi : $r'(t) = i + tj + t^2 k$

$r'(2) = i + 2j + 4k$

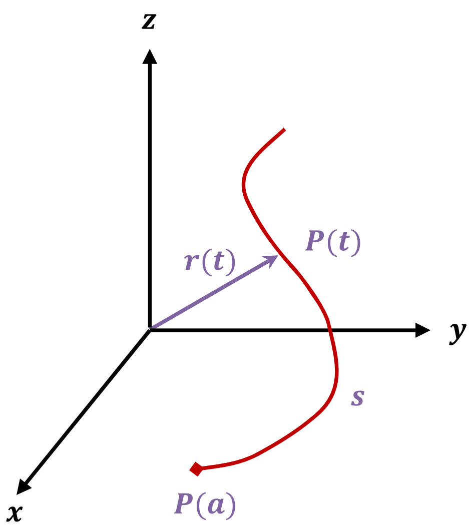
Garis singgung mempunyai arah $\langle 1, 2, 4\rangle$.

Persamaan simetriknya adalah : $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-8/3}{4}$

❖ KECEPATAN, PERCEPATAN, dan KELENGKUNGAN

Bila $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k.$ $a \le t \le b$ **adalah vektor posisi untuk titik** $P = P(t)$ **yang menjelajahi kurva selama t bertambah besar.**

Misalkan $r'(t)$ **ada dan kontinu dan** $r'(t) \neq 0$ → **kurva mulus. Panjang busur** s **dari** $P(a)$ **ke** $P(t)$ **diberikan oleh**



$$s = \int_a^t |r'(t)|du$$

$$= \int_a^t \sqrt{[f'(u)]^2 + [g'(u)]^2 + [h'(u)]^2}\, du$$

Jika t = waktu

Kecepatan $v(t) = r'(t)$

Percepatan $a(t) = r''(t)$

Laju $\frac{ds}{dt} = |r'(t)| = |v(t)|$

Contoh :

Suatu titik P bergerak sedemikian hingga vector posisinya pada saat t adalah

$r(t) = a\,cost\,i + a\,sint\,j + ct\,k$ →**heliks melingkar**

- **Cari panjang busur untuk** $0 \le t \le 2\pi$
- **Hitung percepatan** a **pada** $t = 2\pi$

Solusi :

- **Panjang busur →** $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-asin\,t)^2 + (a\,cost)^2 + c^2}\;dt$

  $$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + c^2}\,dt = 2\pi\sqrt{a^2 + c^2}$$

- $v(t) = r'(t) = -a\,sin\,t\,i + a\,cos\,t\,j + ck$

  $a(t) = r''(t) = -a\,cos\,t\,i - a\,sin\,t\,j$

  $a(2\pi) = -ai$

❖ **KELENGKUNGAN**

<u>Vektor singgung satuan</u> pada $P(t)$ **adalah**

$$T = T(t) = \frac{v(t)}{|v(t)|}$$

$\frac{dT}{ds}$ **= laju perubahan arah garis singgung terhadap jarak sepanjang kurva**

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{T'(t)}{|v(t)|}$$

<u>Kelengkungan</u> k **dari suatu kurva ruang**

$$K = k(t) = \left|\frac{dT}{ds}\right| = \frac{|T'(t)|}{|v(t)|}$$

Contoh : Cari kelengkungan dari heliks melingkar

$$r(t) = a\,cost\,i + a\,sint\,j + ct\,k$$

Solusi : $v(t) = -a\,sin\,t\,i + a\,cos\,t\,j + ck$

$$T(t) = \frac{v(t)}{|v(t)|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + c^2}}(-a\,sin\,t\,i + a\,cos\,t\,j + ck)$$

$$k(t) = \frac{|T'(t)|}{|v(t)|} = \frac{1}{a^2 + c^2}|-a\,cost\,i - a\,sint\,j|$$

$$= \frac{a}{a^2 + c^2}$$

❖ KOMPONEN PERCEPATAN

Vektor normal satuan utama N di P :

$$N = \frac{dT/ds}{|dT/ds|} = \frac{1}{k}\frac{dT}{ds}$$

N adalah normal (⊥) terhadap kurva diperoleh dari diferensial $T.T = 1$;

sehingga $2T.\frac{dT}{ds} = 0$

$\frac{dT}{ds}$ tegak lurus pada T.

$$a = \frac{d^2s}{dt^2}T + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 kN = a_T T + a_T N$$

$$T.a = a_T T.T + a_N TN = a_T$$

$$a_T = T.a = \frac{r'r''}{|r'|}$$

Jika hasil kali silang

$$T.a = a_T(T\ x\ T) + a_N|T\ x\ N| = a_N(T\ x\ N)$$

Sehingga

$$|T\ x\ a| = a_N|T\ x\ N| = a_N|T||N|\sin\theta = a_N$$

atau

$$a_N = |T\ x\ a| = \frac{|r'r''|}{|r'|}$$

Karena $a_N = (ds/dt)^2K = |r'|^2K$; maka :

$$K = \frac{|r'r''|}{|r'|^3}$$

Contoh : pada titik $(1, 1, \frac{1}{3})$, cari T, N, a_T, a_N, dan K

Untuk gerak : $r(t) = ti + t^2j + \frac{1}{3}t^3k$

Solusi : $r'(t) = i + 2tj + t^2k$

$$r''(t) = 2j + 2tk$$

Pada $t = 1 \rightarrow r' = i + 2j + k$

$$r'' = 2j + 2k$$

$$T = \frac{r'}{|r'|} = \frac{i+2j+k}{\sqrt{6}}$$

$$\boldsymbol{a_T} = \frac{\boldsymbol{r'r''}}{|\boldsymbol{r'}|} = \frac{6}{\sqrt{6}}$$

$$\boldsymbol{a_N} = \frac{|\boldsymbol{r'r''}|}{|\boldsymbol{r'}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}1\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}|2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}| = \sqrt{2}$$

$$\boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a_T T}}{\boldsymbol{a_N}} = \frac{(2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}) - (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})}{\sqrt{2}} = \frac{\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{2}}$$

$$\boldsymbol{K} = |\boldsymbol{r'r''}|/|\boldsymbol{r'}|^3 = {\boldsymbol{a_N}}/{|\boldsymbol{r'}|^2} = {\sqrt{2}}/{\left(\sqrt{6}\right)^2} = {\sqrt{2}}/{6\sqrt{6}}$$