BAB III

TURUNAN DALAM RUANG DIMENSI-n

1. FUNGSI DUA PEUBAH ATAU LEBIH

$f(x) = x^2 \rightarrow f(x) =$ **fungsi bernilai riil dari peubah riil**

$f(x) = \langle x^3, e^x \rangle \rightarrow f(x) =$ **fungsi bernilai vektor dari peubah riil**

Fungsi bernilai riil dari dua peubah riil yakni, fungsi f yang memadankan setiap pasangan terurut (x, y) dalam rangka D pada bidang dengan bilangan riil $f\,(x, y)$.

$f\,(x, y) = x^2 + 3y^2 \rightarrow f\,(-1, 4) = (-1)^2 + 3(4)^2 = 49$

Himpunan D disebut daerah asal (domain) fungsi.

Jika <u>daerah asal</u> fungsi tidak diperinci , maka D berupa <u>daerah asal mulanya</u> <u>(natural domain)</u>, yakni himpunan semua titik (x, y) pada bidang dimana aturan fungsi berlaku dan menghasilkan suatu bilangan riil.

Contoh :

$\rightarrow\ f\,(x, y) = x^2 + 3y^2 \rightarrow$ **daerah mulanya adalah seluruh bidang**

$\rightarrow\ g\,(x, y) = 2x\sqrt{y} \quad \rightarrow$ **daerah asal mulanya adalah** $\{(x, y) : x \in R, y \geq 0\}$

<u>Daerah nilai</u> suatu fungsi adalah himpunan nilai-nilainya

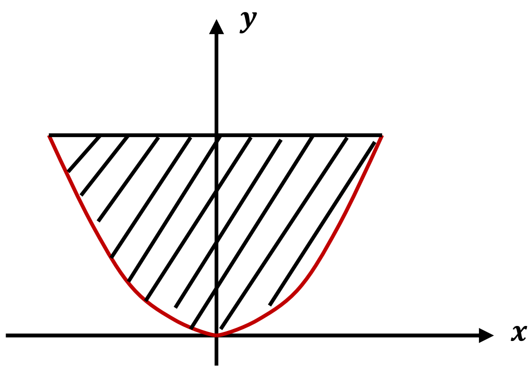
$z =\ f\,(x, y)\ \rightarrow x$ **dan** y **:peubah bebas**

z **: peubah tak bebas**

Contoh : Buatlah grafik daerah asal mula untuk

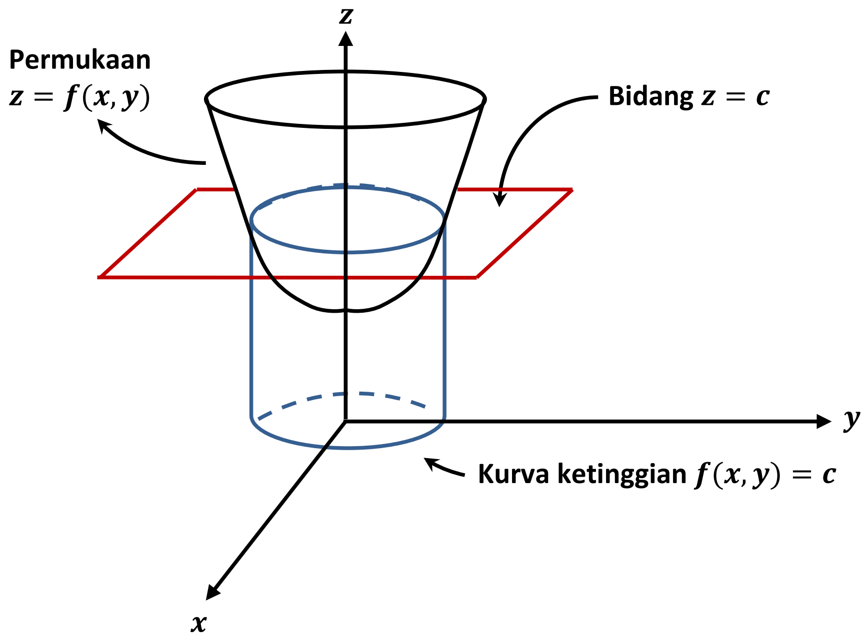
$$f\,(x, y) = \frac{\sqrt{y - x^2}}{x^2 + (y - 1)^2}$$

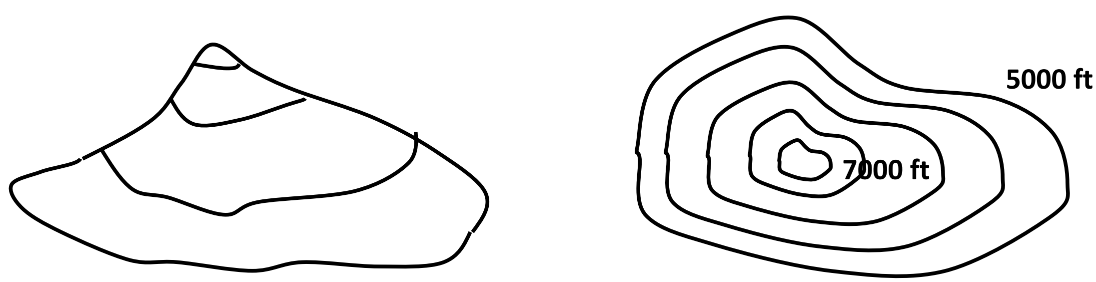
Solusi : Keluarkan $\{(x, y) : y > x^2\}$ **dan titik** $(0, 1)$



❖ KURVA KETINGGIAN

Setiap bidang mendatar $z = c$ memotong permukaan dalam sebuah kurva. Proyeksi kurva pada bidang xy disebut <u>kurva ketinggian</u> , dan kumpulan lengkungannya disebut <u>peta kontur</u>.





Permukaan

Peta kontur dengan kurva ketinggian

2. TURUNAN PARSIAL

Turunan parsial *f* terhadap *x* di (x_0, y_0) dan dinyatakan sebagai $f_x(x_0, y_0)$

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Sebaliknya :

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Contoh :

Carilah $f_x(1,2)$ **dan** $f_y(1,2)$ $\rightarrow f(x,y) = x^2y + 3y^3$

$f_x(x,y) = 2xy \rightarrow f_x(1,2) = 4$

$f_y(x,y) = x^2 + 9y^2 \rightarrow f_y(1,2) = 37$

$z = f(x,y)$

$$f_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \; ; \; f_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

$$f_x(x_0,y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} \quad ; f_y(x_0,y_0) = \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}$$

Contoh :

Jika $z = x^2 sin(xy^2)$ **, cari** $\frac{\partial z}{\partial x}$ **dan** $\frac{\partial z}{\partial y}$

Solusi :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x^2 \frac{\partial[sin(xy^2)]}{\partial x} + sin(xy^2)\frac{\partial}{\partial x}(x^2)$$

$$= x^2 cos\,(xy^2)\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + sin(xy^2)2x$$

$$= x^2 cos\,(xy^2)y^2 + 2x\, sin(xy^2)$$

$$= x^2y^2 cos\,(xy^2) + 2x\, sin(xy^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \frac{\partial[sin(xy^2)]}{\partial y} + sin(xy^2)\frac{\partial}{\partial y}(x^2)$$

$$= x^2 cos\,(xy^2)\frac{\partial}{\partial y}(xy^2) + 0$$

$$= x^2 cos\,(xy^2)2xy$$

$$= 2x^3y\, cos\,(xy^2)$$

❖ TURUNAN PARSIAL TINGKAT TINGGI

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f_{xy} = (f_x)y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \;;\; f_{yx} = (f_y)x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Contoh : **Cari keempat turunan parsial dari**

$$f(x,y) = xe^y - sin\,(x/y) + x^3y^2$$

Solusi : $f_x(x,y) = e^y - \frac{1}{y}cos\,(x/y) + 3x^2y^2$

$$f_y(x,y) = xe^y - \frac{x}{y^2}cos\,(x/y) + 2x^3y$$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{1}{y^2}sin\,(x/y) + 6xy^2$$

$$f_{yy}(x,y) = xe^y + \frac{x^2}{y^4}sin\,(x/y) - \frac{2x}{y^3}cos\,(x/y) + 2x^3$$

$$f_{xy}(x,y) = e^y - \frac{x}{y^3}sin\,(x/y) + \frac{1}{y^2}cos\,(x/y) + 6x^2y$$

$$f_{yx}(x,y) = e^y - \frac{x}{y^3}sin\,(x/y) + \frac{1}{y^2}cos\,(x/y) + 6x^2y$$

$$\|f_{xy} = f_{yx}\|$$

3. LIMIT DAN KEKONTINUAN

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

Nilai $f(x,y)$ semakin dekat ke bilangan L pada waktu (x,y) mendekati (a,b) →caranya tak terhingga

Untuk mengatakan bahwa $lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ berarti bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ (betapapun kecilnya) terdapat $\delta > 0$ yang berpadanan sedemikian hingga $|f(x,y) - L| < \varepsilon$ dengan syarat bahwa $0 < |(x,y) - (a,b)| < \delta$

Contoh : Perlihatkan bahwa fungsi f yang didefinisikan oleh $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ tidak mempunyai limit di titik asal.

Solusi : $f(x,y) = \frac{x^2-0}{x^2+0} = 1$

Jadi, limit $f(x,y)$untuk (x,y) mendekati $(0,0)$ sepanjang sumbu *x* adalah

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,0) = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2-0}{x^2+0} = +1$$

Limit $f(x,y)$ untuk (x,y) mendekati $(0,0)$ sepanjang sumbu *y* adalah

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} f(0,y) = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0-y^2}{0+y^2} = -1$$

Jadi kita mendapat jawaban yang berbeda tergantung bagaimana $(x,y) \to (0,0)$.

- **Kekontinuan pada suatu titik**

  $f(x,y)$ kontinu di titik (a,b), dengan syarat

  1). f mempunyai nilai di (a,b)

  2). f mempunyai limit di (a,b), dan

  3). nilai f di (a,b) sama dengan limitnya $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

  Berarti f tidak mempunyai loncatan atau fruktuasi liar di (a,b)

<u>Teorema</u> :

(komposisi tunggal) jika g suatu fungsi dua peubah kontinu di (a,b) dan f suatu fungsi satu peubah kontinu di $g(a,b)$, maka fungsi komposisi fog yang didefinisikan oleh $(fog)(x,y) = f\big(g(x,y)\big)$, adalah kontinu di (a,b).

Contoh : Perlihatkan bahwa $F(x,y) = \cos\,(x^3 - 4xy + y^2)$ adalah kontinu di setiap titik dari bidang

Solusi :

Fungsi $g(x,y) = x^3 - 4xy + y^2$ → polinom, adalah kontinu dimana-mana, juga $f(t) = \cos t$ kontinu disetiap bilangan t di R. $F(x,y) = f\big(g(x,y)\big)$ kontinu di semua (x,y) di bidang.

4. KETERDIFERENSIALAN

f dapat dideferensialkan di p jika terdapat suatu vektor m sedemikian hingga :

$f(p+h) = f(p) + m.h + |h|\varepsilon(h)$ dengan $\varepsilon(h) \to 0$ pada $h \to 0$

Vektor m = gradient f di P = $\nabla f(p)$

$\|f(p+h) = f(p) + \nabla f(p).h + |h|\varepsilon(h)\|$

Catatan :

- Turunan $f'(x)$ adalah bilangan. Gradient $\nabla f(p)$ adalah vector

- Titik dalam $\nabla f(p).h$ menunjukkan hasil kali titik dari dua vector

Jika f fungsi dua peubah yang dapat dideferensialkan di $P = (x, y)$, maka turunan parsial pertama dari f ada di p dan

$$\left\| \nabla f(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p)i + \frac{\partial f}{\partial y}(p)j \right\|$$

Contoh : Perlihatkan bahwa $f(x, y) = xe^2 + x^2y$ dapat dideferensialkan dimana-mana dan hitung gradient-gradientnya. Cari persamaan bidang singgung $z = T(x, y)$ di (2,0)

Solusi : $\frac{\partial f}{\partial x} = e^2 + 2xy$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^2 + x^2$

Fungsi ini kontinu dimana-mana

$\nabla f(x, y) = (e^2 + 2xy)i + (xe^2 + x^2)j$

$\nabla f(2, 0) = i + 6j = \langle 1, 6 \rangle$

Persamaan bidang singgungnya :

$$\begin{aligned} z &= f(2, 0) + \nabla f(2, 0)\langle x - 2, y \rangle \\ &= 2 + \langle 1, 6 \rangle \langle x - 2, y \rangle \\ &= 2 + x - 2 + 6y = x + 6y \end{aligned}$$

Contoh : $f(x, y, z) = x \sin z + x^2y$, cari $+ \nabla f(1, 2, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin z + 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = x \cos z$$

$\nabla f(x, y, z) = (\sin z + 2xy)i + x^2j + x \cos zk$

$\nabla f(1, 2, 0) = 4i + j + k$

Aturan-aturan untuk gradient :

Teorema :

∇ adalah operator linier, yakni

(i) $\nabla[f(p) + g(p)] = \nabla f(p) + \nabla g(p)$

(ii) $\nabla[xf(p)] = x\nabla f(p)$

(iii) $\nabla[f(p)g(p)] = f(p)\nabla g(p) + g(p)\nabla f(p)$

5. TURUNAN BERARAH DAN GRADIEN

Andaikan $\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ dan $\boldsymbol{i}$ dan $\boldsymbol{j}$ adalah vector-vektor satuan arah $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ positif.

Maka turunan parsial di $\boldsymbol{p}$ dapat dituliskan sebagai berikut :

$$f_x(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+hi) - f(p)}{h}$$

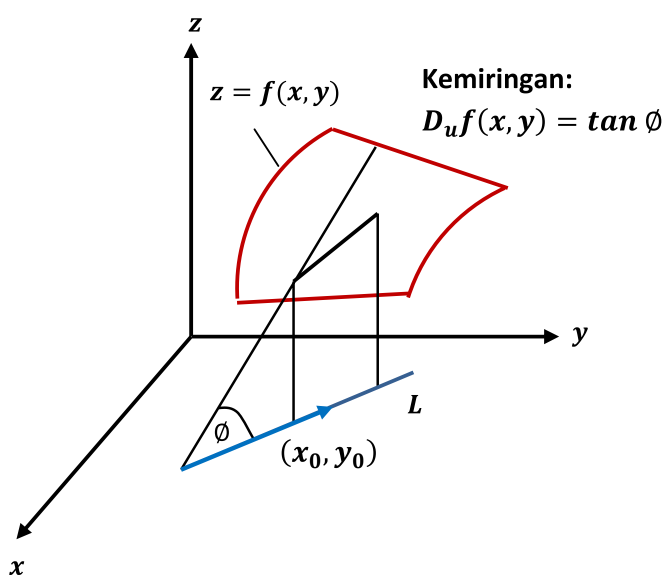
$$f_y(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+hj) - f(p)}{h}$$

Untuk tiap vector satuan $\boldsymbol{u}$, andaikan

$$P_u f(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+hu) - f(p)}{h}$$

Jika limit ini ada, ia disebut <u>turunan berarah</u> f di P pada arah u.

Jadi di $\boldsymbol{f(p) = f_x(p)}$dan $\boldsymbol{D_j f(p) = f_y(p)}$ karena $\boldsymbol{p = (x, y) \to D_u f(x, y)}$



Kaitan dengan gradient :

$$\nabla f(p) = f_x(p)i + f_y(p)j$$

Andaikan f dapat dideferensialkan di P. Maka f mempunyai turunan berarah di P pada arah vector satuan $u = u_1 i + u_2 j$ dan

$$\| D_u f(p) = u . \nabla f(p) \ \to D_u f(x, y) = \ u_1 f_x(x, y) + u_2 f_y(x, y) \|$$

Contoh : jika $f(x, y) = 4x^2 - xy + 3y^2$, tentukan turunan berarah f di (2,-1) pada arah vektor $a = 4i + 3j$

Solusi :

Vektor satuan u pada arah a adalah $\left(\frac{4}{5}\right) i + \left(\frac{3}{5}\right) j$

$f_x(x, y) = 8i - y \;\rightarrow\; f_x(2, -1) = 17$

$f_y(x, y) = -x + 6y \;\rightarrow\; f_x(2, -1) = -8$

$$D_u f(2, -1) = \frac{4}{5}(17) + \frac{3}{5}(-8) = \frac{44}{5}$$

Contoh : Cari turunan berarah dari fungsi $f(x, y, z) = xy \sin z$ di titik $(1, 2, \pi/2)$ pada arah vector $a = i + 2j + 2k.$

Solusi :

Vektor satuan u pada arah a adalah $\frac{1}{3}i + \frac{2}{3}j + \frac{2}{3}k$

$f_x(x, y, z) = y \sin z \;\rightarrow f_x(1, 2, \pi/2) = 2$

$f_y(x, y, z) = x \sin z \;\rightarrow f_y(1, 2, \pi/2) = 1$

$f_z(x, y, z) = xy \sin z \;\rightarrow f_z(1, 2, \pi/2) = 0$

Maka $D_u f\ (1, 2, \pi/2) = \frac{1}{3}(2) + \frac{2}{3}(1) + \frac{2}{3}(0) = \frac{4}{3}$

- **LAJU PERUBAHAN MAKSIMUM**

  Untuk suatu fungsi f di titik p , fungsi berubah paling cepat pada arah mana $D_u f(p)$ yang terbesar

  $D_u f(p) = u.\nabla f(p) = |u||\nabla f(p)| \cos \theta = |\nabla f(p)| \cos \theta$

  $\theta =$ sudut antara u dan $\nabla f(p)$

  $D_u f(p)$ maksimum pada $\theta = 0$

  $D_u f(p)$ minimum pada $\theta = \pi$

  Suatu fungsi bertambah secara paling cepat di p pada arah gradient (dengan laju $|\nabla f(p)|$) dan berkurang secara paling cepat pada arah berlawanan (dengan laju $-|\nabla f(p)|$)

6. ATURAN RANTAI (Chain Rule)

Andaikan $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ dapat didiferensialkan di t dan andaikan $z = f(x, y)$dapat didiferensialkan di $g(t)$, maka fungsi fog akan dapat didiferensialkan di $g(t)$ dan karenanya,

$$(fog)'(t) = \nabla f[g(t)]\, g'(t)$$

Contoh : Misalkan $z = x^3 y$ dengan $x = 2t$ dan $y = t^2$. Tentukan dz/dt

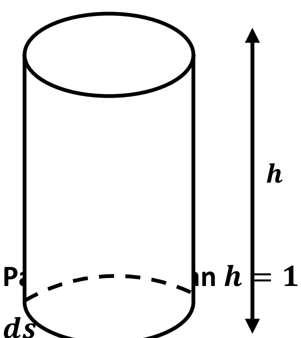
Solusi : $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = (3x^2y)(2) + x^3(2t)$

$$= 6x^2y + 2x^3t = 6(2t)^2y + 2(2t)^3t$$

$$= 40t^4$$

Contoh :

Misalkan sebuah tabung lingkaran tegak pejal dipanasi radiusnya bertambah pada laju $0,2\ ^{cm}/_{jam}$ dan tingginya bertambah pada laju $0,5\ ^{cm}/_{jam}$. Tentukan laju pertambahan luas permukaan terhadap waktu pada saat radius sama dengan $10\ cm$ dan tinggi sama dengan $100\ cm$



Luas permukaan tabung

$$s = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial s}{\partial h}\frac{dy}{dt}$$

$$= (2\pi h + 4\pi r).0,2 + 2\pi r.0,5$$

P[illegible]n $h = 100$

$$\frac{ds}{dt} = (2\pi.100 + 4\pi.10).0,2 + 2\pi.10.0,5$$

$$= 58\pi\ cm^2/jam$$

Contoh :

Andaikan $w = x^2y + y + xz$, dengan $x = cos\ \theta, y = sin\ \theta$, dan $z = \theta^2$. Tentukan $dw/d\theta$ dan hitung nilainya di $\theta = \pi/3$.

Solusi :

$$\frac{dw}{d\theta} = -2.\frac{1}{2}\frac{3}{4} - \frac{\pi^2}{9}\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{4}+1\right)\frac{1}{2} + \frac{2\pi}{3}\frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{8} - \frac{\pi^2\sqrt{3}}{18} + \frac{\pi}{3}$$

Misalkan $x = x(s,t)$ dan $y = y(s,t)$ mempunyai turunan pertama di (s,t) dan misalkan $z = f(x,y)$ dapat didiferensialkan di $(x(s,t), y(s,t))$, maka $z = f(x(s,t), y(s,t))$ mempunyai turunan parsial pertama yang diberikan oleh :

(i) $\frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{ds}$

(ii) $\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dt}$

Contoh :

Jika $z = 3x^2 - y^2$ dengan $x = 2s + 7t$ dan $y = 5st$. Tentukan $\frac{dz}{dt}$ dalam bentuk s dan t.

Solusi :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dt} = (6x)(7) + (-2y)(5s)$$
$$= 42(2s+7t) - 10st\,(5)$$
$$= 84s + 294t - 50s^2t$$

Contoh :

$w = x^2 + y^2 + z^2 + xy$, dengan $x = st, y = s - t, z = s + 2t$. Tentukan dw/dt

Solusi :

$$\left\|\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}\right\|$$

Contoh :

Tentukan dy/dx jika $x^3 + x^2y - 10y^4 = 0$

Solusi :

Misalkan $F(x,y) = x^3 + x^2y - 10y^4$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = -\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 - 40y^3}$$

7. BIDANG SINGGUNG, APROKSIMASI

Suatu permukaan yang ditentukan oleh $F(x, y, z) = k$ dan sebuah kurva pada permukaan tersebut yang melalui titik (x_0, y_0, z_0). Jika $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ adalah persamaan parameter untuk kurva ini, maka untuk semua t

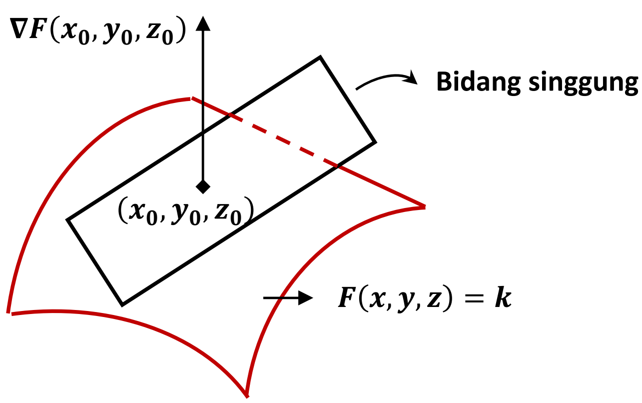
$$F(x(t), y(t), z(t)) = k$$

Dengan aturan rantai :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{dk}{dt} = 0$$

Persamaan diatas dapat dinyatakan dalam bentuk gradient dari F dan tururnan dari vektor untuk kurva

$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ **sebagai** $\nabla F . \frac{dr}{dt} = 0$



Andaikan $F(x, y, z) = k$ menentukan suatu permukaan dan misalkan F dapat dideferensialkan di sebuah titik $P(x_0, y_0, z_0)$ dari permukaan dengan $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, maka bidang yang melalui P tegak lurus $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ dinamakan <u>bidang singgung</u> permukaan itu di P.

Teorema :

Untuk permukaan $F(x, y, z) = k$, persamaan bidang singgung di (x_0, y_0, z_0) adalah $Fx(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + Fy(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + Fz(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$

Dalam hal khusus, untuk permukaan $z = f(x, y)$, persamaan bidang singgung di $\left(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\right)$ adalah

$z - z_0 = fx(x_0, y_0)(x - x_0) + fy(x_0, y_0)(y - y_0)$

Contoh:

Cari persamaan bidang singgung terhadap $z = x^2 + y^2$ di titik (1,1,2).

Solusi :

Misalkan $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\nabla f(x, y) = 2xi + 2yj$$

$$\nabla f(1, 1) = 2i + 2j$$

$$z - 2 = 2(x - 1) + 2(y - 1)$$

$$2x + 2y - z = 2$$

Contoh : Cari persamaan bidang singgung dan garis normal terhadap

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 = 23 \text{ di } (1, 2, 1)$$

Solusi : $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 \rightarrow \nabla F(x, y, z) = 2xi + 2yj + 4zk$

$$\nabla F(1, 2, 3) = 2i + 4j + 12k$$

Maka persamaan bidang singgung

$$2(x - 1) + 4(y - 2) + 12(z - 3) = 0$$

Persamaan simetri dari normal yang melalui $(1, 2, 3)$adalah :

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{4} = \frac{z - 3}{12}$$

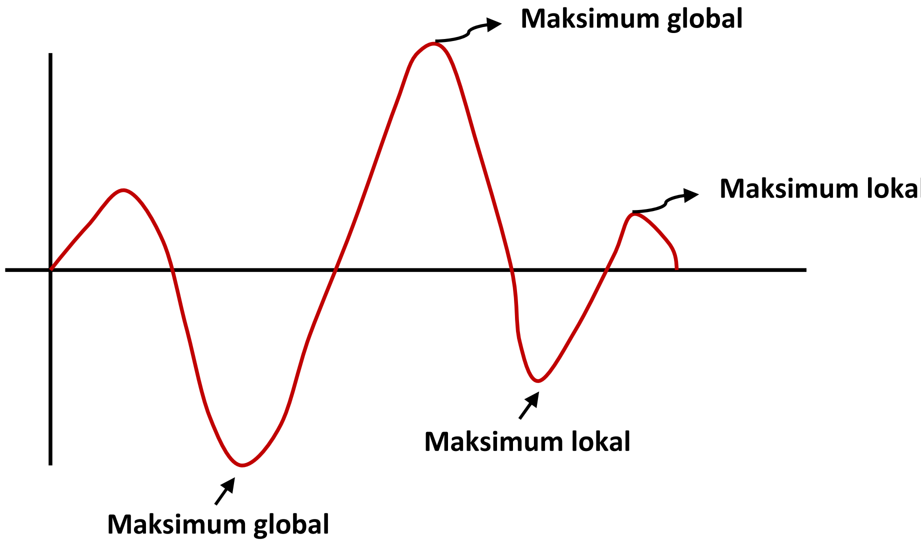
8. MAKSIMUM DAN MINIMUM

Bila po suatu titik di s, yaitu daerah asal dari f

(i) $f(po)$ **adalah nilai maksimum (global) dari f pada s jika $f(po) \geq f(p)$ untuk semua p di s.**

(ii) $f(po)$ **adalah nilai minimum (global) dari f pada s jika $f(po) \leq f(p)$ untuk semua p di s.**

$(iii)\ f(po)$ **adalah nilai ekstreem (global) dari f pada s jika jika ia adalah nilai maksimum (global) atau nilai minimum (global).**



Titik-titik kritis (ekstrem) dari f pada s ada tiga jenis :

1) **Titik-titik batas**
2) **Titik-titik stasioner → jika p_o adalah suatu titik dalam dari s dimana f dapat didiferensialkan dan $\nabla f(p_o) = 0$ → bidang singgung mendatar.**
3) **Titik-titik singular → jika p_o adalah suatu titik dalam dari s dimana f tidak dapat didiferensialkan.**

TEOREMA :

Andaikan f dideferensikan pada suatu himpunan S yang mengandung p_o. jika p_o adalah suatu ekstrem, maka p_o haruslah berupa suatu titik kritis, p_o berupa salah satu dari :

i. **Suatu titik batas dari S, atau**
ii. **Suatu titik stasioner dari f ; atau**
iii. **Suatu titik singular dari f.**

Contoh : cari nilai maksimum dan minimum local dari $f\ (x, y) = x^2 - 2x + y^2/4$

Solusi :

$$f_x\ (x, y) = 2x - 2 \quad \rightarrow f_x\ (x, y) = 2x - 2 = 0 \ \rightarrow x = 1$$

$$f_y\ (x, y) = \frac{1}{2}\ y \quad \rightarrow f_y\ (x, y) = \frac{1}{2}\ y = 0 \ \rightarrow y = 0$$

$$f(1, 0) = 1^2 - 2(1) + 0 = -1$$

$f\ (x, y) = x^2 - 2x + y^2/4 = x^2 - 2x + 1 + y^2/4 - 1$

$= (x-1)^2 + y^2/4 - 1 \geq -1$

∴jadi $f(1, 0)$ adalah minimum global untuk f

❖ **SYARAT CUKUP UNTUK EKSTREM**

Andaikan bahwa $f(x, y)$ mempunyai turunan parsial kedua kontinu di suatu lingkungan dari (x_0, y_0) dan bahwa $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. Ambil

$D = D(x_0, y_0)$ =$f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) = f^2{}_{xy}(x_0, y_0)$

Maka :

(i) **jika $D > 0$ dan $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, maka $f(x_0, y_0)$ adalah nilai maksimum lokal.**
(ii) **jika $D > 0$ dan $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, maka $f(x_0, y_0)$ adalah nilai minimum lokal.**
(iii) **jika $D < 0$, $f(x_0, y_0)$ bukan suatu nilai ekstrem (x_0, y_0) adalah titik pelana.**
(iv) **jika $D = 0$, pengujian tidak member kesimpulan**

Contoh :

Tentukan ekstrem; jika ada, untuk fungsi F yang didefinisikan oleh $F(x, y) = 3x^3 + y^2 - 9x + 4y$

Solusi :

$F_x\ (x, y) = 9x^2 - 9 \quad ; \quad F_y\ (x, y) = 2y + 4$

Titik kritis → $F_x\ (x, y) = F_y\ (x, y) = 0$

$F_x\ (x, y) = 9x^2 - 9 = 0 \ \rightarrow x = \pm 1$

$F_y\ (x, y) = 2y + 4 = 0 \ \rightarrow y = -2$

Titik kritis $(1, -2)$ dan $(-1, -2)$

$F_{xx}(x, y) = 18x \ ;\ F_{yy}(x, y) = 2\ ;\ F_{xy}(x, y) = 0$

Jadi pada titik $(1, -2)$

$D = F_{xx}(1, -2). F_{yy}(1, -2) - F^2{}_{xy}(1, -2)$

$= 18\,.\,2 - 0$

$= 3670$

$F_{xx}(1, -2) = 18 > 0$

Sehingga menurut (ii), $F(1, -2) = -10$ adalah nilai minimum local dari F

Sedangkan pada titik $(-1, -2)$:

$D = F_{xx}(-1, -2). F_{yy}(-1, -2) - F^2{}_{xy}(-1, -2)$

$= -18\,.\,2 - 0$

$= -36 < 0$

Maka menurut (iii) $(-1, -2)$ adalah titik pelana.

9. METODE LAGRANGE

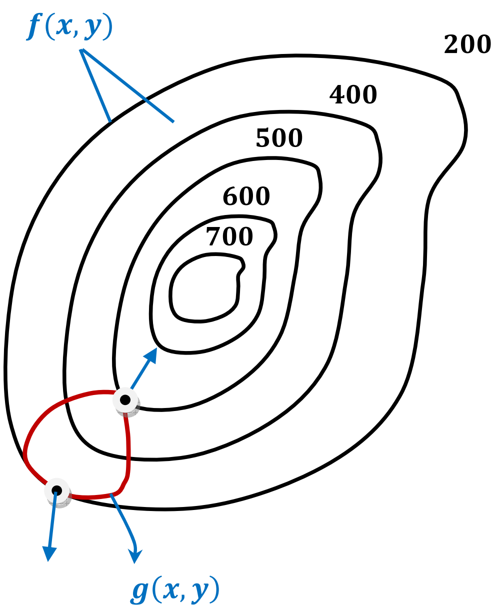
Untuk mencari nilai minimum dari :

$x^2 + 2y^2 + z^4 + 4$ adalah suatu masalah nilai <u>ekstrem bebas.</u> Tapi, bila diminta mencari nilai minimum dari

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + 2y^2 + z^4 + 4 \\ \text{Batasan : } x + 3y - z = 7 \end{array}\right\} \text{ Nilai ektrem terbatasi / terkendala}$$

Untuk menyelesaikan nilai ektrem terkendala dapat digunakan <u>pengali lagrange</u>

- **Tafsiran Geometri Metode Lagrange**



Maksimumkan atau minimum $f(x,y)$ terhadap batasan $g(x,y) = 0$

Untuk memaksimumkan f terhadap batasan $g(x,y) = 0$ adalah mencari kurva. Ketinggian $f(x,y) = k$ dengan kemungkinan k terbesar yang memotong kurva batasan yaitu pada titik $P_0(x_0, y_0)$ dan $P_1(x_1, y_1)$.

Pada titik P_0 dan P_1, kurva ketinggian dan kurva batasan memiliki suatu garis singgung bersama, kedua kurva tersebut mempunyai suatu garis tegak lurus bersama.

Vektor gradient∇f adalah tegak lurus terhadap kurva ketinggian, dan ∇g adalah tegak lurus terhadap kurva batasan, jadi ∇f dan ∇g sejajar di titik P_0 dan P_1, maka :

$\nabla f(P_0) = \lambda_0 \nabla g(P_0)$ dan $\nabla g(P_1) = \lambda_1 \nabla g(P_1)$

λ_0 dan λ_1 adalah bilangan tak nol.

<u>Teorema</u> : Metode Lagrange

Untuk memaksimumkan atau meminimumkan $f(p)$ terhadap batasan/kendala $(p) = 0$, seesaikan sistem persamaan :

$\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$ dan $g(p) = 0$

Tiap titik p yang demikian adalah suatu titik kritis untuk masalah nilai ekstrem terkendala dan λ yang berpadanan disebut <u>pengali lagrange</u>.

Contoh :

Gunakan Metode Lagrange untuk mencari nilai-nilai maksimum dan minimum dari :

$f(x,y) = y^2 - x^2$ **;pada ellips** $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

Solusi :

$$g(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \rightarrow g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0$$

$\nabla f = -2xi + 2yj$; $\nabla g = 2xi + 8yj$

Persamaan Lagrange :

$(i) \quad -2x = \lambda 2x$

$(ii) \quad 2y = \lambda 8y$

$(iii) \quad x^2 + 4y^2 = 4$

Jadi (iii) x **dan** y **tidak dapat sama dengan nol**

Pers (i) $\rightarrow \lambda = -1$

Pers (ii) $\rightarrow y = 0 \rightarrow \frac{x^2}{4} + 0 = 1$, $x = \pm 2$

Jadi titik-titik kritis $(\pm 2, 0)$

Bila $y \neq 0 \rightarrow \lambda = \frac{1}{4}$

Dari persamaan pertama, bila $x = 0$**, maka dari persamaan ketiga** $y = \pm 1$

Maka $(0, \pm 1)$ **juga titik-titik kritis**

$f(x,y) = y^2 - x^2$

$f(2,0) = -4$

$f(-2,0) = -4$

$f(0,1) = 1$

$f(0,-1) = 1$

$\therefore$ **maka nilai minimum dari** $f(x,y)$ **adalah** $= -4$ **dan nilai maksimum adalah 1.**

Contoh :

Tentukan minimum $f(x,y,z) = 3x + 2y + z + 5$**, terhadap batasan** $g(x,y,z) = 9x^2 + 4x^2 - z = 0$

Solusi :

$$\nabla f(x,y,z) = 3i + 2j + k$$

$$\nabla g(x,y,z) = 18xi + 8yj - k$$

Titik kritis, bila

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \text{ dan } g(x,y,z) = 0$$

Untuk (x,y,z,λ) **dengan λ pengali lagrange**

(i) $3 = 18x\lambda$

(ii) $2 = 8yz$

(iii) $1 = -\lambda$

(iv) $9x^2 + 4x^2 - z = 0$

Dari (iii) $\lambda = -1$ **→ substitusi ke** (i) **dan** (ii)**, didapat** $x = -\frac{1}{6}$ **dan** $y = -\frac{1}{4}$

Dari persamaan (iv) $9\left(-\frac{1}{6}\right)^2 + 4\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - z = 0,$

$$z = \frac{1}{2}$$

Sehinga penyelesaian sistem persamaan simultan tersebut adalah $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1\right)$

Satu-satunya titik kritis adalah $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

Maka minimum $f(x,y,z)$ **terhadap kendala adalah** $f\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = 4\frac{1}{2}$

Bagaimana bila batasannya lebih dari Satu

Misalkan terdapat dua batasan $g(x,y,z) = 0$ **dan** $(x,y,z) = 0$ **, maka persamaannya menjadi**

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) + \mu \nabla h(x,y,z)$$

$$g(x,y,z) = 0 \; ; \; h(x,y,z) = 0$$

Dimana λ dan μ adalah pengali lagrange

Sehingga sistem lima persamaan simultan adalah

$(i)\quad f_x(x, y, z) = \lambda\ g_x(x, y, z) + \mu\ h_x(x, y, z)$

$(ii)\quad f_y(x, y, z) = \lambda\ g_y(x, y, z) + \mu\ h_y(x, y, z)$

$(iii)\ f_z(x, y, z) = \lambda\ g_z(x, y, z) + \mu\ h_z(x, y, z)$

$(iv)\ g(x, y, z) = 0$

$(v)\ h(x, y, z) = 0$

Contoh :

Tentukan nilai-nilai maksimum dan minimum dari $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ pada ellips yang merupakan perpotongan tabung $x^2 + y^2 = 2$ dan $y + z = 1$

Solusi :

Persamaan-persamaan Lagrange yang berpaduan

$(i)\quad 1 = 2\lambda x$

$(ii)\ 2 = 2\lambda y + \mu$

$(iii)\ 3 = \mu$

$(iv)\ x^2 + y^2 - 2 = 0$

$(v)\ y + z - 1 = 0$

Dari $(i) \rightarrow 1 = 2\lambda x \rightarrow x = \frac{1}{2}\lambda$

$(ii)\ \&\ (iii) \rightarrow 2 = 2\lambda y + 3 \rightarrow y = -\frac{1}{2}\lambda$

$(iv) \rightarrow \left(\frac{1}{2}\lambda\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\lambda\right)^2 = 2 \rightarrow \lambda = \pm 2$

Untuk $\lambda = +2 \rightarrow$ **titik kritis** $(1, -1, 2)$

Untuk $\lambda = -2 \rightarrow$ **titik kritis** $(-1, 1, -2)$

$f(1, -1, 2) = 5 \rightarrow$ **Nilai Maksimum**

$f(-1, 1, -2) = 1 \rightarrow$ **Nilai Minimum**