BAB V
DISTRIBUSI PROBABILITAS DISKRIT

5.1. Distribusi Uniform Diskrit

Bila variabel acak X memiliki nilai x_1, x_2, ... x_k dengan probabilitas yang sama, maka **distribusi uniform diskrit** dinyatakan sebagai:

$$f(x,k)=\frac{1}{k}; \qquad x = x_1, x_1, ...x_k \qquad k = \text{parameter}$$

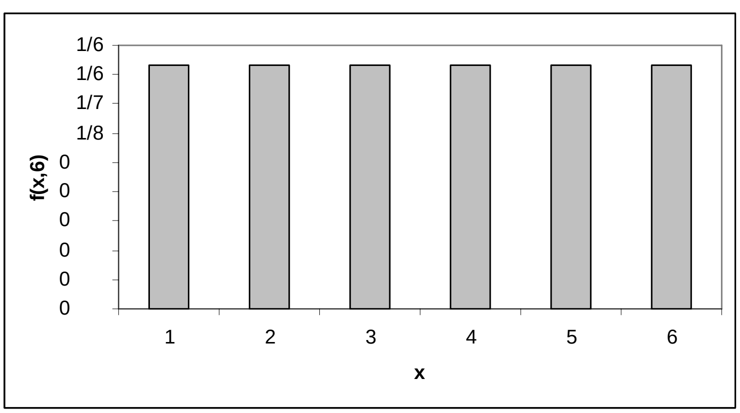
Contoh 5.1: Bila lampu pijar dipilih secara acak dari suatu kotak yang berisi lampu pijar 40 watt, 60 watt, 75 watt, 100 watt, dengan probabilitas masing-masing ¼. Maka distribusi uniformnya adalah:

$$f(x,4)=\frac{1}{4}; \qquad x = 40,60,75,100$$

Contoh 5.2: Bila sebuah dadu dilemparkan, setiap elemen dari ruang sampel S = {1,2,3,4,5,6} terjadi dengan probabilitas yang sama = 1/6. Karena itu distribusi uniform adalah:

$$f(x,6)=\frac{1}{6}; \qquad x = 1,2,3,4,5,6$$

Secara grafis (histogram) ditunjukkan pada gambar berikut:



Teorema 5.1: rata-rata dan varians dari suatu distribusi uniform diskrit $f(x;k)$ adalah:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{k} \qquad \text{dan} \qquad \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2}{k}$$

contoh 5.3: rata-rata dan varians dari soal 5.2 adalah:

$$\mu = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.5$$

$$\sigma^2 = \frac{(1-3.5)^2 + (2-3.5)^2 + \dots\dots\dots + (6-3.5)^2}{6} = \frac{35}{12}$$

5.2 Distribusi Binomial dan Multinomial

Suatu percobaan binomial adalah suatu percobaan yang memiliki sifat-sifat berikut:

1. Percobaan terdiri atas *n* percobaan yang identik.
2. Setiap hasil percobaan dapat diklasifikasikan sebagai sukses atau gagal
3. Probabilitas suskes, dinyatakan dengan *p*, dan kegagalan dengan q = 1- *p*.
4. Percobaan-percobaan yang dilakukan tidak saling bergantung (independent).

Distribusi Binomial

Distribusi probabilitas dari vaiabel acak binomial *X*:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad x = 0,1,2,3,\ldots$$

Contoh 5.1: Probabilitas suatu alat tertentu akan tetap bertahan (tidak rusak) bila digetarkan adalah ¾. Tentukan probabilitas bahwa terdapat 2 dari 4 kompenen yang ditest akan bertahan.

Solusi:

$$P(X=2)=\binom{4}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{4!}{2!2!}.\frac{3^2}{4^2}=\frac{27}{128}$$

Contoh 5.2: Dalam perencanaan sistem pengendalian banjir suatu sungai, banjir tahunan maksimum adalah hal yg harus diperhatikan. Bila probabilitas dari banjir maksimum tahunan melebihi ketinggian desain tertentu h_0 adalah 0,1. Berapa probabilitas bahwa ketinggian h_0 akan terlampaui satu kali dalam 5 tahun mendatang:

Solusi:

$$P(X=1)=\binom{5}{1}(0.1)^1(0.9)^4=0.328$$

Rata-rata dan varians dari distribusi binomial adalah:

$$\mu = np \qquad \text{dan} \qquad \sigma^2 = npq$$

Distribusi Multinomial

Bila dari suatu percobaan diperoleh hasil E_1, E_2, ...E_k, dengan probabilitas p_1, p_2,.... p_k, maka distribusi probabilitas dari suatu variabel acak X_1, X_2,... X_k, dalam n kali percobaan adalah:

$$f(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_k; p_1, p_2, \ldots\ldots\ldots p_k, n)=\binom{n}{x_1, x_2, \ldots x_k} p_1^{x_1}, p_2^{x_2}, \ldots . p_k^{x_k}$$

dengan $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$ dan $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$

5.3. Distribusi Geometrik

Bila percobaan yang berulang secara independent menghasilkan kesuksesan dengan probabilitas *p* dan gagal dengan probabilitas *q* = 1 – *p*. Maka distribusi probabilitas variabel acak *X* pada saat terjadinya kesuksesan pertama adalah:

$$P(X = x) = pq^{x-1}, \qquad x = 1,2,3,.....$$

Contoh 5.3. Pada suatu proses pembuatan alat tertentu diketahui bahwa setiap 100 ietm ada 1 yang rusak. Berapa probabilitas bahwa item ke 5 yang diawasi adalah yang pertama rusak.

$$P(X = 5) = (0.01)(0.99)^4 = 0.0096$$

Rata-rata dan varians dari suatu variabel acak dengan distribusi geometrik

$$\mu = \frac{1}{p}, \qquad \sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

5.4. Distribusi Binomial negatif

Bila percobaan yang berulang secara independent menghasilkan kesuksesan dengan probabilitas *p* dan gagal dengan probabilitas *q* = 1 – *p*. Maka distribusi probabilitas variabel acak *X* pada saat terjadinya kesuksesan yang ke - *k* adalah:

$$P(X_k = x) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}, \qquad x = k, k+1, k+2,....$$

Contoh:

Anggap suatu kabel terdiri dari beberapa kawat yang terususn secara independent. Kadang-kadang kabel tersebut dibebani dengan beban berlebih; pada saat itu probabilitas bahwa ada 1 kawat yang putus adalah 0.05. Asumsikan bahwa kegagalan 2 atau lebih kawat tidak sama. Kabel harus diganti bila 3 kawat sudah putus, tentukan probabilitas bahwa kabel dapat bertahan pada saat dibebani dengan beban berlebih paling tidak 5 kali sebelum kabel tersebut diganti:

Solusi:

$$P(X_k \geq 6) = 1 - P(X_3 < 6)$$

$$= 1 - \binom{2}{2}(0.05)^3 - \binom{3}{2}(0.05)^3(0.95) - \binom{4}{2}(0.05)^3(0.95)^2 = 0.99884$$

5.5. Proses Poisson dan Distribusi Poisson

Banyak masalah yang menjadi perhatian seorang insinyur adalah mengetahui kemungkinan terjadinya suatu peristiwa pada interval waktu tertentu. Contoh : gempa dapat terjadi pada waktu tertentu, kecelakaan lalu lintas dapat terjadi pada rentan waktu tertentu di suatu jalan raya. Dalam kasus seperti ini kejadian suatu peristiwa lebih tepat bila dimodelkan dengan **Proses Poisson**. Asumsi proses poisson adalah sebagai berikut :

- Suatu peristiwa dapat terjadi secara acak dan pada interval waktu tertentu.
- Kejadian satu peristiwa dengan peristiwa lain pada interval waktu tertentu adalah independen (bebas).
- Probabilitas kejadian suatu peristiwa pada interval waktu Δt adalah proporsional terhadap Δt, dan dapat diberikan dengan $v\Delta t$, dimana v adalah rata-rata kejadian suatu peristiwa.

Berdasarkan asumsi diatas, disribusi Poissson dinyatakan dengan rumus berikut :

$$P(X_t = x) = \frac{e^{-vt}(vt)^x}{x!}, \qquad x = 0,1,2,....$$

Contoh : Berdasarkan data, badai hujan di suatu kota selama 20 tahun, menunjukkan bahwa rata-rata terdapat 4 kali badai hujan per tahun. Asumsikan kejadian badai hujan adalah proses Poisson, berapa probabilitas bahwa tidak ada badai hujan tahun depan :

$$P(X_t = 0) = \frac{e^{-4}(4)^0}{0!} = 0.018$$

Probabilitas akan terjadi 4 kali badai hujan tahun depan adalah

$$P(X_t = 4) = \frac{e^{-4}(4)^4}{4!} = 0.195$$

Probabilitas akan terjadi 2 kali atau lebih badai hujan tahun depan adalah

$$P(X_t \geq 2) = 1 - \sum_{x=0}^{1} \frac{e^{-4}(4)^x}{x!} = 1 - 0.018 - 0.074 = 0.908$$