BAB VI
DISTRIBUSI PROBABILITAS MENERUS

6.1 Distribusi Uniform (seragam) Menerus

Distribusi seragam menerus merupakan distribusi yang paling sederhana. Karaketristik distribusi ini adalah fungsi kepadatannya datar (sama). Fungsi kepadatannya dalam interval [A,B] secara matematis dinyatakan sebagi berikut:

$$f(x:A,B)=\begin{cases}\dfrac{1}{B-A} & A\le x\le B\\ 0 & \text{selainnya}\end{cases}$$

Contoh: Bila ruang konferensi dapat didigunakan tidak lebih dari 4 jam. Diasumsikan bahwa lamanya waktu konferensi X memiliki distribusi yang seragam.

a. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas:

$$f(x:A,B)=\begin{cases}\dfrac{1}{4} & 0\le x\le 4\\ 0 & \text{selainnya}\end{cases}$$

b. Berapa probabilitas bahwa waktu konferensi paling tidak 3 jam

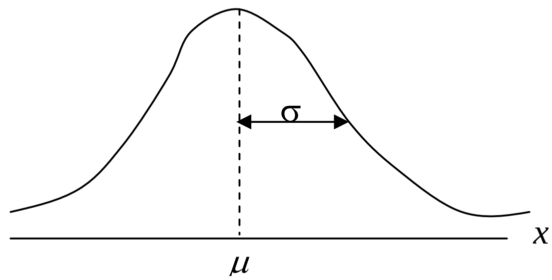
$$P[X\ge 3]=\int_3^4 (1/4)dx = 1/4$$

Rata-rata dan varians dari distribusi seragam adalah:

$$\mu=\frac{A+B}{2} \quad \text{dan} \quad \sigma^2=\frac{(B-A)^2}{12}$$

6.2 Distribusi Normal

Distribusi probabilitas menerus yang paling penting adalah ditsribusi normal. Secara grafiknya disebut kurva normal seperti gambar berikut:



Distribusi normal sering disebut juga dengan Distribusi Gauss. Secara matematis distribusi normal tergantung dari dua variabel yaitu μ (rata-rata) dan σ (deviasi standar). Fungsi kepadatannya (density function) sbb:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]^2\right], \qquad -\infty < x < \infty, \quad \pi = 3.14159\ldots$$

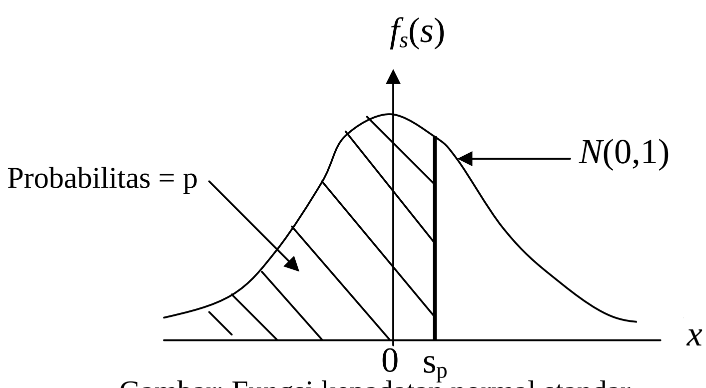
Notasi singkat distribusi ini adalah $N(\mu,\sigma)$

Distribusi Normal Standar

Distribusi Gauss dengan μ = 0, dan σ = 1; disebut sebagai **distribusi normal standar** dan ditulis sebagai $N(0,1)$. Sehingga fungsi kepadatannya adalah:

$$f_s(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}s^2\right], \qquad -\infty < s < \infty,$$

Notasi khusus $\Phi(s)$ biasanya digunakan untuk menandakan fungsi distribusi **variasi normal standar** S. $\Phi(s) = F_s(s)$, dimana S adalah distribusi $N(0,1)$.



Gambar: Fungsi kepadatan normal standar

Dengan merujuk pada gambar diatas, maka

$$\Phi(s_p) = p$$

Sebaliknya, nilai variasi normal standar pada probabilitas kumulatif p dapat ditulis sebagai:

$$s_p = \Phi^{-1}(p)$$

Fungsi distribusi dari $N(0,1)$, yakni $\Phi(s)$ sudah dibuat dalam tabel di berbagai buku statitsik dan probabilitas, tabel ini disebut sebagai Tabel probabilitas normal. Contoh tabelnya sebagai berikut:

x	$\Phi(s)$
0.0	0.500000
0.01	0.503989
0.02	0.507978
.	.
.	.
0.50	0.694463

Tabel biasanya diberikan untuk nilai variasi yang positif, untuk nilai yang negatif dapat diperoleh dengan:

$$\Phi(-s) = 1- \Phi(s)$$

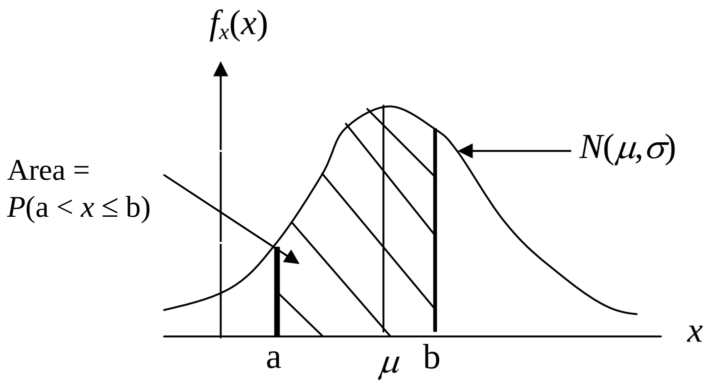
Nilai s untuk $p < 0.5$ dapat dihitung dengan:

$$s = \Phi^{-1}(p) = - \Phi^{-1}(1-p)$$

Dengan tabel $\Phi(s)$, probabilitas untuk setiap distribusi normalyang lain dapat ditentukan sebagai berikut. Bila variasi normal X dengan distribusi $N(\mu,\sigma)$; maka probabilitasnya adalah:

$$P(a < X \leq b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left[-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]^2\right] dx$$

Area diatas dapat diilustrasikan seperti gambar berikut:



Gambar: Fungsi kepadatan probabilitas untuk $N(\mu,\sigma)$

Persamaan diatas dapat juga diselesaikan dengan membuat perubahan variasi berikut:

$$s = (x - \mu)/\sigma \qquad \text{dan} \qquad dx = \sigma ds$$

sehingga:

$$P(a < X \le b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{(a-\mu)/\sigma}^{(b-\mu)/\sigma} e^{-(1/2)s^2} \sigma ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(a-\mu)/\sigma}^{(b-\mu)/\sigma} e^{-(1/2)s^2} ds$$

persamaan ini merupakan area (luasan) dari fungsi kepadatan normal standar antara $(a\text{-}\mu)/\sigma$ dan $(b\text{-}\mu)/\sigma$. Sehingga dapat ditentukan dengan:

$$P(a < X \le b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Contoh: Dari data menunjukkan curah hujan total tahunan di suatu kolam penampung diperkirakan memiliki distribusi normal dengan rata-rata 60 in, dan deviasi standar 15 in.

a. Tentukan probabilitas bahwa pada tahun depan curah hujan tahunan antara 40 sampai 70 in.

Solusi:

$$P(40 < X \le 70) = \Phi\left(\frac{70-60}{15}\right) - \Phi\left(\frac{40-60}{15}\right)$$

$$= \Phi(0.67) - \Phi(-1.33)$$

$$= \Phi(0.67) - [1 - \Phi(1.33)]$$

Dari tabel diperoleh:

$$P(40 < X \le 70) = 0.7486 - (1 - 0.9082) = 0.6568$$

b. Berapa probabilitas curah hujan tahunan paling tidak (minimal) 30 in

$$P(X \ge 30) = \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{30-60}{15}\right)$$

$$= 1 - \Phi(-2.00) = 1 - [1 - \Phi(2.00)] = \Phi(2.00) = 0.9772$$

c. Tentukan nilai curah hujan tahunan bila disktribusi kumulatifnya adalah 10%.

$$P(X \le x_{.10}) = 0.10$$

$$\Phi\left(\frac{x_{10}-60}{15}\right) = 0.10$$

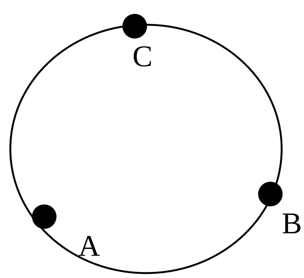
Dari table menunjukkan bahwa probabilitas kurang dari 0.5 terkait dengan nilai variasi negative, sehingga;

$$\frac{x_{10}-60}{15} = \Phi^{-1}(0.10) = -\Phi^{-1}(0.90) = -1.28$$

Sehingga, $x_{10} = 60 - 1.28(15) = 40.8\, in$

Contoh: struktur cangkang ditopang oleh tiga tiang A, B, C seperti tunjukkan pada gambar berikut:

Walaupun beban dari atap dapat diperkirakan dengan tepat, namun kondisi tanah tidak bisa diprediksi dengan tepat.



Asumsikan bahwa penurunan pondasi $\rho_{A}, \rho_{B}, \rho_{C},$ adalah variasi normal bebas dengan rata-rata 2, 2.5; dan 3 cm. Koefesien varians masing-masing adalah 20%, 20%, 25%. Berapa probabilitas maksimum penurunan melebihi 4 cm?

Solusi: $P(\max \quad \rho > 4 \text{ cm}) = 1 - P(\max \quad \rho \le 4 \text{ cm})$

$$= 1 - P(\rho_A \le 4 \cap \rho_B \le 4 \cap \rho_C \le 4)$$

$$= 1 - P(\rho_A \le 4) P(\rho_B \le 4) P(\rho_C \le 4)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{4-2}{0.4}\right)\Phi\left(\frac{4-2.5}{0.5}\right)\Phi\left(\frac{4-3}{0.75}\right)$$

$$= 1 - \Phi(5)\Phi(3)\Phi(1.333)$$

$$= 1 - 1 \text{ x } 0.9986 \text{ x } 0.9088 = 0.0925$$

6.3 Distribusi Logaritmik Normal (Log-normal)

Suatu variabel acak X merupakan distribusi probabilitas logaritmik normal (log-normal) bila ln X (logaritmik natural X) adalah normal. Dalam kasus ini fungsi kepadatannya adalah:

$$f_x(x) = \frac{1}{\zeta x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left[\frac{(\ln x - \lambda)}{\zeta}\right]^2\right], \qquad 0 \le x < \infty$$

dimana rata-rata = $\lambda = E(\ln X)$ dan deviasi standar = $\zeta = \sqrt{Var(\ln X)}$

Karena transformasi logaritmik, distribusi probabilitas log-normal dapat ditentukan dengan menggunakan distribusi normal.

$$P(a < X \le b) = \int_a^b \frac{1}{\zeta x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left[\frac{(\ln x - \lambda)}{\zeta}\right]^2\right] dx$$

Bila, $s = \dfrac{\ln x - \lambda}{\zeta}$, maka $dx = x\zeta ds$

$$P(a < X \le b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(\ln a - \lambda)/\zeta}^{(\ln b - \lambda)/\zeta} \exp\left[-\frac{1}{2}[s]^2\right] ds = \Phi\left(\frac{\ln b - \lambda}{\zeta}\right) - \Phi\left(\frac{\ln a - \lambda}{\zeta}\right)$$

Rumus diatas menunjukkan probabilitas adalah fungsi dari parameter λ dan ζ. Parameter ini terkait dengan nilai rata-rata μ dan deviasi standar σ.

Misalkan $Y = \ln X$, merupakan distribusi normal $N(\lambda, \zeta)$, maka $X = e^Y$, dan

$$\mu = E(X) = E(e^Y)$$

$$= \frac{1}{\zeta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^y \exp\left[-\frac{1}{2}\left[\frac{(y-\lambda)}{\zeta}\right]^2\right] dy$$

$$= \frac{1}{\zeta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[y - \frac{1}{2}\left[\frac{(y-\lambda)}{\zeta}\right]^2\right] dy$$

$$\mu = \left[\frac{1}{\zeta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{y-\left(\lambda+\zeta^2\right)}{\zeta}\right]^2\right\} dy\right] \exp\left(\lambda + \frac{1}{2}\zeta^2\right)$$

Persamaan dalam tanda kurung diatas adalah total satu satuan luas dari fungsi kepadatan Gauss $N\left(\lambda+\zeta^2, \zeta\right)$. Oleh karena itu:

$$\mu = \exp\left(\lambda + \frac{1}{2}\zeta^2\right) \quad \rightarrow \quad \lambda = \ln\mu - \frac{1}{2}\zeta^2$$

Dengan cara yang sama, varians dari X adalah:

$$E\left(X^2\right) = \frac{1}{\zeta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2y} \exp\left[-\frac{1}{2}\left[\frac{(y-\lambda)}{\zeta}\right]^2\right] dy$$

$$= \frac{1}{\zeta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2\zeta^2}\left\{y^2 - 2\left(\lambda+2\zeta^2\right)y + \lambda^2\right\}\right] dy$$

$$E\left(X^2\right) = \frac{1}{\zeta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{y-\left(\lambda+2\zeta^2\right)}{\zeta}\right\}^2 dy\right] \exp\left[2\left(\lambda+\zeta^2\right)\right]$$

$$= \exp\left[2\left(\lambda+\zeta^2\right)\right]$$

Karena; $Var(X) = E\left(X^2\right) - \mu_x^2$; maka

$$Var(X) = \exp\left[2\left(\lambda+\zeta^2\right)\right] - \exp\left[2\left(\lambda+\tfrac{1}{2}\zeta^2\right)\right] = \mu^2\left(e^{\zeta^2} - 1\right)$$

dari persamaan diatas kita dapatkan:

$$\zeta^2 = \ln\left(1 + \frac{\sigma^2}{\mu^2}\right);$$

Bila σ/μ tidak besar (≤0.30), maka $\ln\left[1 + \left(\sigma^2 / \mu^2\right)\right] \cong \sigma^2 / \mu^2$; sehingga:

$$\zeta \cong \frac{\sigma}{\mu} = \delta = COV$$

Median (x_m) = nilai tengah dari log-normal adalah:

$$P(X \le x_m) = 0.5 \quad \text{atau} \quad \Phi\left(\frac{\ln x_m - \lambda}{\zeta}\right) = 0.5 \text{ ; maka:}$$

$$\frac{\ln x_m - \lambda}{\zeta} = \Phi^{-1}(0.5) = 0 \;\rightarrow\; \lambda = \ln x_m$$

Sebaliknya: $x_m = e^y$

Dengan menggunakan persamaan-persamaan sebelumnya diperoleh:

$$x_m = \frac{\mu}{\sqrt{1+\delta^2}} \;\rightarrow\; \lambda = \ln \frac{\mu}{\sqrt{1+\delta^2}}$$

Hal ini berarti median dari suatu distribusi log-normal selalu lebih kecil dari nilai rata-ratanya, yakni $x_m < \mu$

Contoh: Dari data menunjukkan curah hujan total tahunan di suatu kolam penampung diperkirakan memiliki distribusi log-normal dengan rata-rata 60 in, dan deviasi standar 15 in.

a. Tentukan probabilitas bahwa pada tahun depan curah hujan tahunan antara 40 sampai 70 in.

Solusi:

$$\zeta \cong \frac{\sigma}{\mu} = \frac{15}{60} = 0.25$$

$$\lambda = \ln \mu - \frac{1}{2}\zeta^2 = \ln 60 - \tfrac{1}{2}(0.25)^2 = 4.06$$

$$P(40 < X \leq 70) = \Phi\left(\frac{70 - 4.06}{0.25}\right) - \Phi\left(\frac{40 - 4.06}{0.25}\right)$$

$$= \Phi(0.75) - \Phi(-1.48)$$

$$= \Phi(0.75) - [1 - \Phi(1.48)]$$

Dari tabel diperoleh:

$$P(40 < X \leq 70) = 0.773373 - 0.069437 = 0.7039$$

b. Berapa probabilitas curah hujan tahunan paling tidak (minimal) 30 in

$$P(X \geq 30) = \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{30 - 4.06}{0.25}\right)$$

$$= 1 - \Phi(-2.64) = 0.9958$$

c. Tentukan nilai curah hujan tahunan bila disktribusi kumulatifnya adalah 10%.

$$P(X \leq x_{.10}) = 0.10$$

$$\Phi\left(\frac{\ln x_{10} - 4.06}{0.25}\right) = 0.10$$

Dari table menunjukkan bahwa probabilitas kurang dari 0.5 terkait dengan nilai variasi negative, sehingga;

$$\frac{\ln x_{10} - 4.06}{0.25} = \Phi^{-1}(0.10) = -\Phi^{-1}(0.90) = -1.28$$

Sehingga, $\ln x_{10} = 4.06 - 1.28(0.25) = 3.74$

$$x_{10} = e^{3.74} = 42.10 \ \ inc$$

6.4 Distribusi Gamma dan exponensial

Distribusi gamma dan exponensial terkait dengan proses Poisson. Distribusi gamma berasal dari fungsi gamma yang diformulasikan sebagai berikut:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad \text{untuk } \alpha > 0$$

Dengan memisalkan $u = x^{\alpha-1}$ dan $dv = e^{-x}dx$, diperoleh:

$$\Gamma(\alpha) = -e^{-x}x^{\alpha-1}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x}(\alpha-1)x^{\alpha-2}dx = (\alpha-1)\int_0^{\infty} x^{\alpha-2}dx$$

untuk α >1., menghasilkan rumusan pengulangan

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1).$$

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)(\alpha-2)\Gamma(\alpha-2) = (\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\Gamma(\alpha-3).$$

dan seterusnya,

Bila $\alpha = n$, dimana n adalah bilangan bulat positif, maka

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2),....,\Gamma(1)$$

Berdasarkan rumus fungsi gamma:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x}dx = 1$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

Sehingga: Fungsi kepadatan **distribusi gamma** dari suatu variabel acak X, dengan parameter α dan β adalah:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}, & x > 0 \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}$$

dimana α > 0 dan β > 0

Bila α = 1, maka distribusi tersebut dinamakan **distribusi exponensial**, fungsi kepadatannya adalah:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta} e^{-x/\beta} & x > 0 \\ 0 & \text{selainnya} \end{cases}$$

Rata-rata dan varians distribusi gamma adalah:

$$\mu = \alpha\beta \qquad \text{dan} \qquad \sigma^2 = \alpha\beta^2$$

Rata-rata dan varians distribusi exponensial adalah

$$\mu = \beta \qquad \text{dan} \qquad \sigma^2 = \beta^2$$

Contoh:

Suatu sistem terdiri dari komponen tertentu yang waktu terjadi kerusakkannya dinyatakan dengan T. Variabel acak T diasumsikan memiliki distribusi exponensial dengan rata-rata β = 5. Bila 5 dari kompenen ini dipasang pada sisitem yang berbeda, berapa probabilitas bahwa paling tidak 2 komponen masih berfungsi pada akhir tahun ke 8.

Solusi:

Probabilitas komponen masih berfungsi pada akhir tahun ke 8 adalah:

$$P(T > 8) = \frac{1}{5}\int_{8}^{\infty} e^{-t/8} dt = e^{-8/5} \cong 0.2$$

Dengan menggunakan distribusi binomial diperoleh:

$$P(X \geq 2) = \sum_{2}^{5} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = 1 - \sum_{0}^{1} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = 1 - 0.7373 = 0.2627.$$