BAB IV

INTEGRAL DALAM RUANG DIMENSI-n

4.1. INTEGRAL LIPAT DUA ATAS PERSEGI PANJANG

Andaikan f suatu fungsi dua peubah yang terdefinisi pada suatu persegi panjang tertutup R, jika

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k, \overline{y}_k)\, \Delta Ak$$

Ada, kita katakana f dapat diintegralkan pada R. lebih lanjut $\iint_R f(x,y)dA = \lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k, \overline{y}_k)\Delta Ak$

- **Jika** $f(x) \geq 0$, **Maka** $\int_a^b f(x)dx \rightarrow$ **<u>luas daerah</u> di bawah kurva**
- **Jika** $f(x,y) \geq 0$, **Maka** $\iint_R f(x,y)dA \rightarrow$ **<u>volume</u> benda pejal dibawah permukaan** $z = f(x,y)$ **dan diatas persegi panjang R.**

SIFAT-SIFAT INTEGRAL LIPAT DUA

(a) **Integral lipat dua adalah linier, yaitu :**

- $\iint_R kf(x,y)dA = k \iint_R f(x,y)dA$
- $\iint_R [f(x,y) + g(x,y)]dA = \iint_R f(x,y)dA + \iint_R g(x,y)dA$

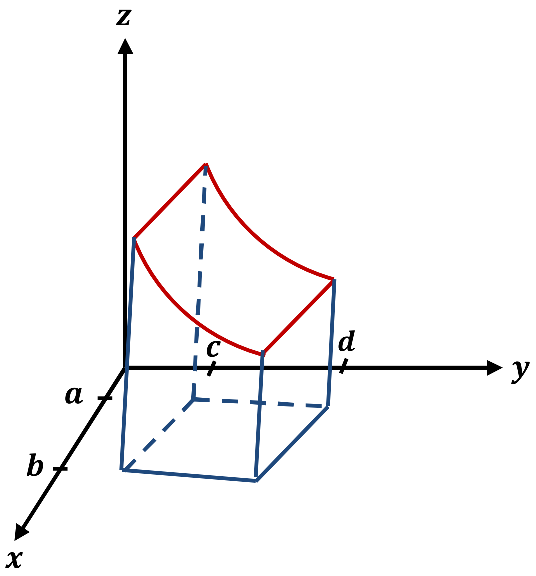
(b) **Integral lipat dua adalah aditif pada persegi panjang**

- $\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} g(x,y)dA$

(c) **Sifat perbandingan berlaku. Jika** $f(x,y) \leq g(x,y)$

Untuk semua (x,y) **di R, maka**

$$\iint_R f(x,y)dA \leq \iint_R g(x,y)dA$$



Bila $R = \{(x,y):\ a \le x \le b, c \le y \le d\}$

Maka volume

$$V = \iint_R f(x,y)\,dA$$

$$\boxed{V = \iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy}$$

atau

$$\boxed{V = \iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx}$$

Contoh :

Hitung $\int_0^3 \left[\int_1^2 (2x + 3y)\,dx\right] dy$

Solusi : $\int_1^2 (2x + 3y)\,dx = [x^2 + 3yx]_1^2 = 4 + 6y - (1 + 3y) = 3 + 3y$

$$\int_0^3 \left[\int_1^2 (2x + 3y)\,dx\right] dy = \int_0^3 (3 + 3y)\,dy = \left[3y + \frac{3}{2}y^2\right]_0^3$$

$$= 9 + \frac{27}{2} = \frac{45}{2}$$

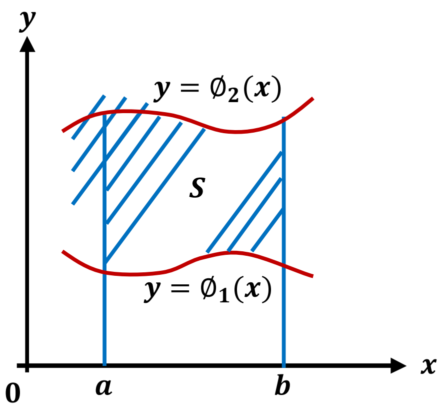
Contoh : Cari Volume dari benda pejal yang dibatasi oleh $z = 4 - x^2 - y$ **dan dibawah oleh persegi panjang** $R = \{(x,y): 0 \le x < 1, 0 \le y \le 2\}$

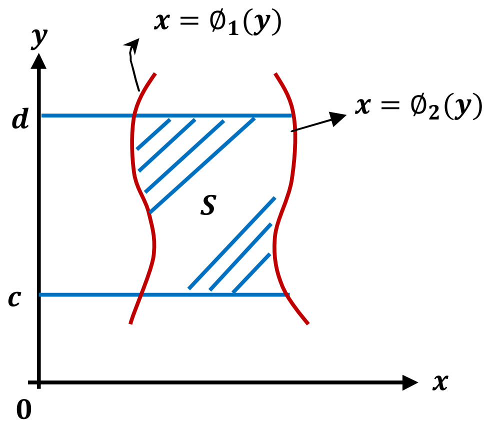
Solusi : $V = \iint_R (4 - x^2 - y)\,dA = \int_0^2 \int_0^1 (4 - x^2 - y)\,dx\,dy$

$$= \int_0^2 \left[4x - \frac{x^3}{3} - yx\right]_0^1 dy = \int_0^2 \left[4 - \frac{1}{3} - y\right]_0^1 dy = \left[4y - \frac{1}{3}y - \frac{1}{2}y^2\right]_0^2$$

$$= 8 - \frac{2}{3} - 2 = {}^{16}/_{3}$$

4.2. INTEGRAL LIPAT DUA atas DAERAH BUKAN PERSEGI PANJANG





$$\iint_S f(x,y)dA = \int_a^b \int_{\emptyset_1(x)}^{\emptyset_2(x)} f(x,y)dxdy$$

$$\iint_S f(x,y)dA = \int_c^d \int_{\emptyset_1(y)}^{\emptyset_2(y)} f(x,y)dxdy$$

Contoh : Hitung integral lipat $\int_3^5 \int_{-x}^{x^2} (4x+10y)dydx$

Solusi :

$$\int_3^5 \int_{-x}^{x^2} (4x+10y)dydx = \int_3^5 [4xy+5y^2]_{-x}^{x^2}\, dx$$

$$= \int_3^5 [(4x^3+5x^4)-(-4x^2+5x^2)]\, dx$$

$$= \int_3^5 (5x^4+4x^3-x^2)\, dx = \left[x^5+x^4-\frac{x^3}{3}\right]_3^5 = 3393\frac{1}{3}$$

Contoh :

Tentukan volume bidang empat (tetrahedron) yang dibatasi oleh bidang-bidang koordinat dan bidang $3x + 6y + 4z - 12 = 0$

Solusi :

$$3x + 6y + 4z - 12 = 0 \rightarrow z = \frac{3}{4}(4 - x - 2y)$$

Mencari volume benda pejal $z = \frac{3}{4}(4 - x - 2y)$ dan diatas daerah S

Bidang yang diberikan memotong bidang xy digaris $x + 2y - 4 = 0$. Persamaan ini dapat ditulis $y = 2 - \frac{x}{2}$ dan $x = 4 - 2y$ sehingga S dapat dinyatakan sebagai himpunan y

$$S = \left\{(x, y): 0 \le x \le 4, 0 \le y \le 2 - \frac{x}{2}\right\}$$

Atau sebagai himpunan x

$$S = \{(x, y): 0 \le x < 4 - 2y, 0 \le y \le 2\}$$

Bila kita pilih S sebagai himpunan y

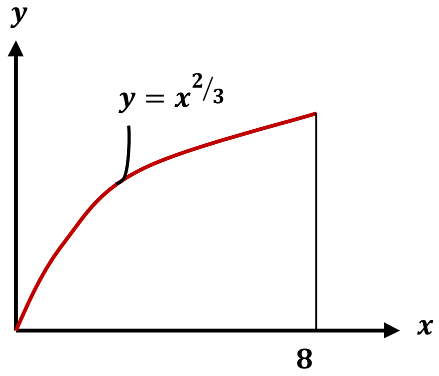
$$V = \int_0^4 \int_0^{2-\frac{x}{2}} \frac{3}{4}(4 - x - 2y)\,dy\,dx = \int_0^4 \left[\frac{3}{4}\int_0^{2-\frac{x}{2}} (4 - x - 2y)\,dy\,dx\right]$$

$$= \int_0^4 \frac{3}{4}\left[4y - xy - y^2\right]_0^{2-\frac{x}{2}} dx = \frac{3}{16}\int_0^4 (16 - 8x + x^2) = 4$$

4.3. PENERAPAN INTEGRAL LIPAT DUA

Masa sebuah Lamina : $m = \iint_S \delta(x, y)\,dA$

Contoh : Sebuah Lamina (suatu pelat tipis yang demikian tipisnya sehingga dapat dipandang sebagai berdimensi dua) dengan kerapatan $\delta(x, y) = xy$ dibatasi oleh sumbu x, garis x=8, dan kurva y=x. Tentukan masa totalnya.



Solusi :

$$m = \iint_s xy dA = \int_0^8 \iint_0^{x^{2/3}} xy\, dydx$$

$$= \int_0^8 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_0^{x^{2/3}} dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{10}x^{10/3}\right]_0^8 = 153,6$$

__PUSAT MASSA__

Bila $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots m_n$ adalah kumpulan titik massa yang masing- masing ditempatkan di $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ pada bidang. Maka momen total terhadap sumbu y dan sumbu x di berikan oleh :

$$M_y = \sum_{k=1}^{n} x_k m_k \qquad\qquad M_x = \sum_{k=1}^{m} y_k m_k$$

Pusat massa adalah :

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}$$

Bila suatu lamina yang kerapatannya $\delta(x, y)$ dan menc akup suatu daerah di bidang xy , maka pusat massanya adalah :

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint_s x\delta(x,y)\, dA}{\iint_s \delta(x,y)\, dA} \qquad\qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint_s y\delta(x,y)\, dA}{\iint_s \delta(x,y)\, dA}$$

Contoh : Tentukan pusat masssa Lamina dari contoh sebelumnya

$$M_y = \iint_s x\delta(x, y)\, dA = \int_0^8 \int_0^{x^{2/3}} x^2 y\, dydx = \frac{1}{2}\int_0^8 x^{10/3} dx = 945,2\ 3$$

$$M_x = \iint_s y\delta(x, y)\, dA = \int_0^8 \int_0^{x^{2/3}} xy^2\, dydx = \frac{1}{3}\int_0^8 x^3 dx = 341,33$$

Maka pusat massa

$\overline{x} = \frac{M_y}{m} = 6,15 \qquad \overline{y} = \frac{M_x}{m} = 2,22$

MOMEN INERSIA

Untuk suatu system n partikel pada suatu bidang yang bermassa $m_1, m_2, \ldots, m_n$ dan yang berj arak $r_1, r_2, \ldots, r_n$ dari garis L.

Maka momen inersia system itu terhadap L didef inisikan sebagai

$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 \ldots + m_n r_n^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2$

Bila suatu Lamina dengan kerapatan $\delta(x, y)$ yang mencakup suatu daerah S dari bidang xy. Momen Inersia Lamina terhadap sumbu x,y, dan z diberikan oleh :

$$I_x = \iint_S y^2 \delta(x, y)\, \mathrm{dA} \quad ; \quad I_y = \iint_S x^2 \delta(x, y)\, \mathrm{dA}$$

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\delta(x, y)\, \mathrm{dA} = I_x + I_y$$

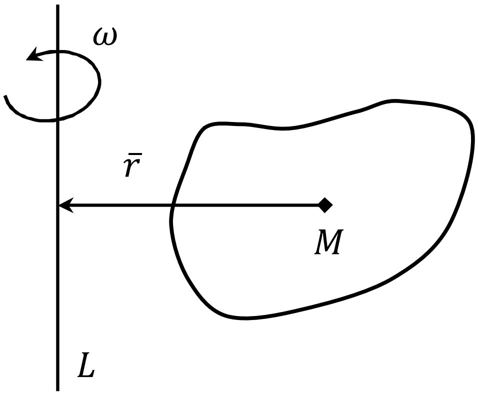
Contoh : Tentukan momen inersia terhadap sumbu x,y, dan z untuk Lamina pada contoh sebelumnya.

Solusi :

$$I_x = \iint_S xy^3\, \mathrm{dA} = \int_0^8 \int_0^{x^{2/3}} xy^3\, dy dx = \frac{1}{4}\int_0^8 x^{11/3} dx = 877,71$$

$$I_y = \iint_S x^3 \mathrm{y}\, \mathrm{dA} = \int_0^8 \int_0^{x^{2/3}} x^3 y\, dy dx = \frac{1}{2}\int_0^8 x^{13/3} dx = 6144$$

$I_z = I_x + I_y = 702\ 1,71$



Bila kumpulan massa $\sum_{k=1}^{n} m_k = M$

Maka $I = M\bar{r}^2$

$\bar{r} = \sqrt{\frac{I}{M}}$

$\bar{r}$ = jari-jari girasi (kitaran)

J adi energy kinetic dari system yang berputar mengelilingi L dengan kecepatan sudut ω adalah

$$KE = \frac{1}{2} m^{-2} \omega^2$$