BAB V

KALKULUS VEKTOR

5.1. LINE INTEGRALS (INTEGRAL GARIS)

Pada integral $\int_a^b f(x)dx$ → dip eroleh dengan menggantik an himpunan $[a, b]$. Bila himpunan $[a, b]$ diganti dengan kurva C, maka intergral yang dihas ilkan :

$\int_C f(x,y)ds$ disebut integral garis atau integral kurva

$$\boxed{\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{Cx'(t)^2 + Cy'(t)^2}dt}$$

Contoh : Hitung $\int_C x^2 y\, ds$, dengan C ditentukan oleh persamaan parameter $x = 3\cos t, y = 3\sin t, 0 \le t \le \pi/2$. Buktikan j uga parameterisasi

$x = \sqrt{9-y^2}, \ y = y, 0 \le y \le 3,$ memberikan nilai yang sama

Solusi : $\int_C x^2 yds = \int_0^{\pi/2} (3\cos t)^2 (3\sin t).\sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2}dt$

$$= 81\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin t \; dt = -\frac{81}{3}\cos^3 t\Big]_0^{\pi/2} = 27$$

Untuk parameterisasi kedua ,

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy = \sqrt{1+\frac{y^2}{9-y^2}}dy = \frac{3}{\sqrt{9-y^2}}dy$$

$$\int_C x^2 yds = \int_0^3 (9-y^2)y.\frac{3}{\sqrt{9-y^2}}dy$$

$$= 3\int_0^3 \sqrt{9-y^2}\, y\, dy = -\left[(9-y^2)^{3/2}\right]_0^3 = 27$$

J ika C secara parameter diberikan oleh

$x = x(t),\ \ y = y(t)\ , z = z(t),\ \ a \le t\ \le b$

$$\int_C f(x,y,t)ds = \int f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}dt$$

Contoh : Tentukan massa kawat yang kerapatannya $\delta(x,y,z) = kz$ jika kawat tersebut berbentuk heliks dengan parameterisasi :

$x = 3\,cos\,t\,,\ \ y = 3\,sin\,t\ \ , z = 4t\,,\ \ 0\ \le t\ \le \pi$

Solusi : $m = \int_C kz\,ds\ = k\int_0^{\pi}(4t)\sqrt{9sin^2t\ + 9cos^2t\ + 36}dt$

$$= 20\,k\int_0^{\pi} t\,dt\ = \left[20\,k\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} = 10\,k\pi^2$$

5.2 KERJA

Bila gaya yang bekerja pada suatu titik (x,y,z) dalam ruang diberikan oleh medan vector $F(x,y,z) = M(x,y,z)$ i+N$(x,y,z)j\ + P(x,y,z)$k

Andaikan $r = xi\ + yj\ + zk$adalah vector posisi untuk titik $Q(x,y,z)$. Jika T adalah vector singgung satuan $\frac{dr}{ds}$ di Q . Maka F.T adalah komponen singgung F di Q .

$$\left\| W = \int_C \text{F.T}ds\ = \int_C \frac{dr}{dt}dt = \int_C \text{F}\,dr \right\|$$

Bila $dr = dxi\ + dyj\ + dzk$, maka

$$W = \int_C \mathbf{F}\, ds = \int_C M dx + N\, dy + P dz$$

Contoh :

Hitung integral garis $\int_C (x^2 - y^2)\, dx + 2xydy$ sepanjang kurva C yang persamaannya adalah $x = t^2$, $x = t^3$, $0 \le t \le {}^3/_2$

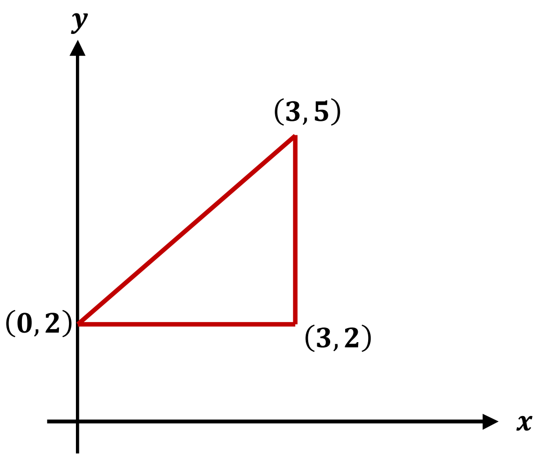
Solusi : Karena $dx = 2t\ dt$; $dy = 3t^2 dy$

$$\int_C (x^2 - y^2)\, dx + 2xydy = \int_0^{3/2} [\, (t^4 - t^6) 2t + 2t^5 (3t^2)] dt$$

$$= \int_0^{3/2} (\, 2x^5 + 4t^7) dt = 16,61$$

Contoh :

Hitung $\int_C xy^2\, dx + xy^2 dy$ sepanjang tapan $C = C_1 \cup C_2$ yang ditunjukkan pada gambar berikut, Hitung juga integral ini sepanjang tapan lurus C_3 dari (0,2) ke (3 ,5).



- Pada $C_1, y = 2\ , dy = 0$

$$\int_{C_1} xy^2\, dx + xy^2 dy = \int_0^3 4x\, dx$$

$$= [2x^2]_0^3 = 18$$

- Pada $C_2, x = 3\ , dx = 0$

$$\int_{C_2} xy^2\, dx + xy^2 dy = \int_2^5 3y^2\, dy$$

$$= [y^3]_2^5 = 117$$

- Pada $C_2, x = 3\ , dx = 0$

$$\int_{C_2} \mathbf{xy}^2\, dx + x\mathbf{y}^2\mathbf{dy} = \int_2^5 3y^2\, dy$$

$$= [y^3]_2^5 = 117$$

$$\therefore \int_{C_2} \mathbf{xy}^2\, dx + x\mathbf{y}^2\mathbf{dy} = 18 + 117 = 135$$

- Pada $C_3, y = x + 2\ , dy = dx$

$$\int_{C_1} \mathbf{xy}^2\, dx + x\mathbf{y}^2\mathbf{dy} = 2\int_0^3 x(x+2)^2\, dy$$

$$= 2\left[\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + 2x^2\right]_0^3 = \frac{297}{2}$$