BAB VI

DETERMINAN

Misal persamaan sebagai berikut :

$$2x + 3y + 2 = 0 \quad \ldots\ldots.(1) \quad x\,4$$

$$3x + 4y + 6 = 0 \quad \ldots\ldots.(2) \quad x\,3$$

Dengan cara Eliminasi kita peroleh,

$$8x + 12y + 8 = 0$$

$$9x + 12y + 18 = 0$$

Dengan pengurangan diperoleh, $x = -10$, $y = 6$

Bila $a_1x + b_1y + d_1 = 0 \qquad x\,b_2$

$a_2x + b_2y + d_2 = 0 \qquad x\,b_1$

Menjad $a_1b_2x + b_1b_2y + d_1b_2 = 0$

$a_2b_1x + b_1b_2y + d_2b_1 = 0$

Dengan pengurangan :

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x + d_1b_2 - d_2b_1 = 0$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = d_2b_1 - d_1b_2$$

$$x = \frac{d_2b_1 - d_1b_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(*)$$

Persamaan diatas ada harganya bila $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ $\rightarrow$ **<u>determinan orde kedua</u>**

Persamaan $(*)$ **dapat ditulis sebagai**

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Bila yang dieliminasi x ; persamaan menjadi

$$y = -\frac{a_1 d_2 - a_2 d_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \rightarrow y = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$\dfrac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$ **dan** $\dfrac{y}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{-1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$

Bila digabungkan menjadi

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}} = \frac{-y}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Bila $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}$; $\Delta_0 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

Maka persamaan : $a_1 x + b_1 y + d_1 = 0$

$$a_2 x + b_2 y + d_2 = 0$$

Menghasilkan : $\frac{x}{\Delta_1} = \frac{-y}{\Delta_2} = \frac{1}{\Delta_0}$

Contoh : Cari persamaan berikut dengan cara determinan

$$5x + 2y + 19 = 0$$

$$3x + 4y + 17 = 0$$

Solusi :

$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 14$ $\qquad\qquad$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 19 \\ 3 & 17 \end{vmatrix} = 28$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 19 \\ 4 & 17 \end{vmatrix} = -42$

$$\frac{x}{\Delta_1} = \frac{-y}{\Delta_2} = \frac{1}{\Delta_0} \quad \rightarrow \frac{x}{-42} = \frac{-y}{28} = \frac{1}{14}$$

$$\left\| x = \frac{-42}{14} = -3 \;\; ; \; -y = \frac{28}{14} \;\; ; \;\; y = -2 \right\|$$

DETERMINAN ORDE KETIGA

Misalkan sebuah determinan $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

Minor dari a_1 adalah $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}$

Minor dari b_1 adalah $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}$

Minor dari c_1 adalah $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}$

Menghitung determinan orde ketiga

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Contoh :Hitung determinan berikut

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1(5.8 - 4.7) - 3(4.8 - 2.7) + 2(4.4 - 2.5)$$

$$= 12 - 54 + 12 = -30$$

Kita dapat menguraikan determinan atas sembarang baris atau kolom dengan cara yang sama, perhatikan tandanya

$$\begin{matrix} + & - & + & - \ldots \\ - & + & - & + \cdots \\ + & - & + & - \cdots \\ - & + & - & + \cdots \end{matrix}$$

KOFAKTOR

Jika $A = [a_{ij}]$ adalah matriks bujur sangkar, kita dapat membentuk determinan yang elemen-elemenmya adalah :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Masing-masing elemen memberikan <u>kofaktor</u> , yang merupakan <u>minor</u> elemen dalam determinan.

Contoh : $det\ A = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

Minor elemen 2 adalah $\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 24 = -24$

Tanda tempatnya (+) . Jadi kofaktor elemen 2 adalah $= +(-24) = -24$

Minor elemen 3 adalah $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 = -6$

Tanda tempatnya (+) . Jadi kofaktor elemen3 adalah $= -(-6) = 6$

Tanda tempat yang sesuai diberikan oleh :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots\dots \\ - & + & - & + & \dots\dots \\ + & - & + & - & \dots\dots \\ - & + & - & + & \dots\dots \end{vmatrix}$$

Adjoint Matriks Bujur Sangkar

Kita mulai dengan $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

Determinannya adalah : $A = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

Matriks konfaktornya adalah :

$$C = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$ dengan A_{11} = konfaktor a_{11}

$A_{i\,j}$ = konfaktor $a_{i\,j}$ dst

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = +(0 - 24) = -24$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 6) = -6$$

$$A_{13} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = +(16 - 1) = 15$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 20) = -20$$

$$A_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = +(0 - 5) = -5$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(8 - 3) = -5$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = +(18 - 5) = 13$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -(12 - 20) = 8$$

$$A_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} = +(2 - 12) = -10$$

Matriks kofaktornya adalah : $C = \begin{bmatrix} -24 & 6 & 15 \\ 20 & -5 & -5 \\ 13 & 8 & -10 \end{bmatrix}$

Dan transpose dari C , yaitu $C^T = \begin{bmatrix} -24 & 20 & 13 \\ 6 & -5 & 8 \\ 15 & -5 & -10 \end{bmatrix}$

Matriks C^T ini disebut adjoin dari matriks A dan ditulis sebagai Adj.A

Dengan demikian adjoin dari matriks $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ adalah

$$Adj\ A = C^T = \begin{bmatrix} -21 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

INVERS MATRIKS BUJUR SANGKAR

Invers dari matriks A adalah :

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A} = C^T$$

Contoh : Dari contoh sebelumnya, tentukan invers matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$det\ A = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2(0-24) - 3(0-6) + 5(16-1) = 45$$

Matriks kofaktornya adalah : $C = \begin{bmatrix} -24 & 6 & 15 \\ 20 & -5 & -5 \\ 13 & 8 & -10 \end{bmatrix}$

Matriks adjoin dari A, yaitu C^T adalah :

$$C^T = \begin{bmatrix} -24 & 20 & 13 \\ 6 & -5 & 8 \\ 15 & -5 & -10 \end{bmatrix}$$

Maka invers dari A diberikan oleh :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-24}{45} & \frac{20}{45} & \frac{13}{45} \\ \frac{6}{45} & \frac{-5}{45} & \frac{8}{45} \\ \frac{15}{45} & \frac{-5}{45} & \frac{-10}{45} \end{bmatrix} = \frac{1}{45}\begin{bmatrix} -24 & 20 & 13 \\ 6 & -5 & 8 \\ 15 & -5 & -10 \end{bmatrix}$$