BAB VII

MATRIKS

DEFINISI

Matriks adalah sekumpulan bilangan riil (atau elemen) atau kompleks yang disusun menurut baris dan kolom sehingga membentuk jajaran (array) persegi panjang

Matriks yang mempunyai m baris dan n kolom disebut $m \quad x n$ atau matriks berorde $m\ x n$

$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 6 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ **→ matriks berorde 2x3**

Matriks baris → hanya terdiri dari satu baris

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriks kolom → matriks hanya terdiri dari satu kolom

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Notasi Matriks $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$ **→ dinyatakan $[a_{ij}]$ atau A**

Perkalian Matriks

(a) **Perkalian dengan scalar**

Contoh : $4\ x \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 20 \\ 24 & 4 & 28 \end{bmatrix}$

$k[a_{ij}] = [ka_{ij}]$

(b) **Perkalian dua buah matriks**

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \ ; \ b = [bj] = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$A.\ b = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + a_{23}b_3 \end{bmatrix}$$

Transpose Matriks : Jika baris dan kolom suatu matriks dipertukarkan

Transpose Matriks A dinyatakan dengan $\widetilde{A}$ atau A^T

$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ **; Maka** $A^T = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 6 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

Matriks-matriks khusus :

(a) **Matriks Bujur Sangkar :** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 8 & 9 \\ 1 & 7 & 4 \end{bmatrix}$

(b) **Matriks diagonal : matriks bujur sangkar yang semua elemennya sama dengan nol , kecuali elemen pada diagonal utama ; ex :** $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

(c) **Matriks satuan : matriks diagonal yang semua elemennya diagonal utamanya sama dengan satu, yaitu :**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A.I = A \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 7 & 9 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 7 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A.I = I.A = A$$

(d) **Matriks nol : Matriks yang sama elemen sama dengan nol, yaitu** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 6 & 3 & -9 \end{bmatrix}$ **dan** $B = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 4 & -6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 6 & 3 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 4 & -6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Persamaan Simultan dengan Tiga $a_n u$

Tinjaulah Sistem persamaan

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0$$

Bila dicari dengan cara eliminasi

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}} = \frac{-y}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

$$\left\| \frac{x}{\Delta_1} = \frac{-y}{\Delta_2} = \frac{z}{\Delta_3} = \frac{-1}{\Delta_0} \right\|$$

Contoh : Carilah harga x dari persamaan

$$2x + 3y - z - 4 = 0$$

$$3x + y + 2z - 13 = 0$$

$$x + 2y - 5z + 11 = 0$$

Solusi : $\frac{x}{\Delta_1} = \frac{-1}{\Delta_0}$

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -18 + 51 - 5 = 28$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -13 \\ 2 & -5 & 11 \end{vmatrix} = -56$$

$$\frac{x}{\Delta_1} = \frac{-1}{\Delta_0} \rightarrow \frac{x}{-56} = \frac{-1}{28} \quad ; \left\| x = \frac{56}{28} = 2 \right\|$$

Kesejalanan Suatu Sistem Persamaan

Tinjauan suatu system tiga persamaan dengan dua $a_n u$

$$3x - y - 4 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

$$2x + 3y - 8 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

$$x - 2y + 3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (iii)$$

Jika persamaan (ii) dan (iii) kita pecahkan dengan cara biasa, maka diperoleh $x = 1$ dan $y = 2$. Bila nilai tersebut dimasukkan ke persamaan (i), maka dihasilkan

$$3x - y - 4 = 3 - 2 - 4 = -3 \neq 0$$

Jadi jawaban persamaan (ii) dan (iii) tidak memenuhi persamaan (i). Ketiga persamaan itu tidak mempunyai persamaan bersama. Jadi ketiga persamaan itu <u>tidak sejalan</u> (tidak konsisten).

Jika suatu system persamaan sejalan, maka mempunyai pemecahan bersama.

Tinjau ketiga persamaan berikut :

$$3x + y - 5 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

$$2x + 3y - 8 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

$$x - 2y + 3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (iii)$$

Pemecahan persamaan (ii) dan (iii) $\rightarrow x = 1$, $y = 2$ substitusi ke (i) menghasilkan

$$3x + y - 5 = 3 + 2 - 5 = 0$$

Berarti ketiga persamaan tersebut memiliki pemecahan bersama.

Tinjau kasus umum berikut :

$$a_1 x + b_1 y + d_1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

$$a_2 x + b_2 y + d_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

$$a_3 x + b_3 y + d_3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (iii)$$

Jika persamaan (ii) dan (iii) dipecahkan, yaitu

$$a_2 x + b_2 y + d_2 = 0$$

$$a_3 x + b_3 y + d_3 = 0$$

Diperoleh $\frac{x}{\Delta_1} = \frac{-y}{\Delta_2} = \frac{-1}{\Delta_0}$

Dengan $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix}$, $\Delta_0 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

Sehingga $x = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}$ **dan** $y = \frac{-\Delta_2}{\Delta_0}$

Jika hasil ini dimasukkan ke persamaan (i) **menghasilkan**

$$a_1 \frac{\Delta_1}{\Delta_0} + b_1 \frac{-\Delta_2}{\Delta_0} + d_1 = 0$$

$$a_1\Delta_1 - b_1\Delta_2 + d_1\Delta_0 = 0$$

Yaitu $a_1 \begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix} + d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$

Yang merupakan determinan, yaitu

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0$$

Contoh : Ujilah kesejalanan (konsistensi) system persamaan

$$2x + y - 5 = 0$$

$$x + 4y + 1 = 0$$

$$3x - y - 10 = 0$$

Agar persamaan tersebut sejalan, maka determinan $= 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & -10 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -10 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -10 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-39) - 1(-13) - 5(-13) = 0$$

Jadi persamaan diatas adalah <u>sejalan</u>

Contoh : Tentukan harga k agar persamaan berikut sejalan

$$3x + y + 2 = 0$$

$$4x + 2y - k = 0$$

$$2x - y + 3k = 0$$

Solusi :

Agar sejalan determinan sama dengan nol

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -k \\ 2 & -1 & 3k \end{vmatrix} = 0$$

$$3\begin{vmatrix} 2 & -k \\ -1 & 3k \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & -k \\ 2 & 3k \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$3(6k - k) - 1(12k + 2k) + 2(-4 - 4) = 0$$

$$15k - 14k - 16 = 0 \rightarrow k - 16 = 0 \rightarrow k = 16$$

Contoh : Tentukan harga k agar persamaan berikut sejalan

$$x + (k + 1)y + 1 = 0$$

$$2kx + 5y - 3 = 0$$

$$3x + 7y + 1 = 0$$

Solusi : syarat untuk kesejalanan adalah :

$$\begin{vmatrix} 1 & k+1 & 1 \\ 2k & 5 & -3 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$1\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} - (k + 1)\begin{vmatrix} 2k & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2k & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$(5 + 21) - (k + 1)(2k + 9) + (14k - 15) = 0$$

$$-2k^2 + 3k + 2 = 0$$

$$2k^2 - 3k - 2 = 0 \rightarrow (2k + 1)(k - 2) = 0$$

$$\boxed{k = 2 \text{ atau } k = -\frac{1}{2}}$$

Tentukan invers matriks dari A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Langkah-langkah secara rinci :

(a) **Hitung determinan A, yaitu** $|A|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1(2-0) - 2(8-30) + 3(0-6) = 28$$

(b) **Hitung matriks kofaktornya :**

$$A_{11} = +(2-0) = 2 \ ; \ A_{12} = -(8-30) = 22 \ , A_{13} = +(0-6) = -6$$

$$A_{21} = -(4-0) = -4 \ ; \ A_{22} = +(2-18) = -16 \ ; \ A_{23} = -(0-12) = 12$$

$$A_{31} = +(10-3) = 7 \ ; \ A_{32} = -(5-12) = -17 \ ; \ A_{33} = +(1-8) = -7$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 22 & -6 \\ -4 & -16 & 12 \\ 7 & 7 & -7 \end{bmatrix}$$

(c) **Cari adjoin Matriks A**

$$Adj\ A = C^T = \begin{bmatrix} 2 & 22 & -6 \\ -4 & -16 & 12 \\ 7 & 7 & -7 \end{bmatrix}$$

(d) **Invers Matriks** $A \rightarrow A^{-1}$

$$A^{-1} = \frac{1}{28}\begin{bmatrix} 2 & 22 & -6 \\ -4 & -16 & 12 \\ 7 & 7 & -7 \end{bmatrix}$$

<u>Perkalian Matriks Bujur Sangkar dengan inversnya</u>

Dari contoh sebelumnya, jika $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

Maka $A^{-1} = \frac{1}{28}\begin{bmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 22 & -16 & 7 \\ -6 & 12 & -7 \end{bmatrix}$

Sehingga $A^{-1}.A = \frac{1}{28}\begin{bmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 22 & -16 & 7 \\ -6 & 12 & -7 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{28}\begin{bmatrix} 2-16+4 & 4-4+0 & 6-20+14 \\ 22-64+42 & 44-16+0 & 66-80+14 \\ -6+48-42 & -12+12+0 & -18+60-14 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{28}\begin{bmatrix} 28 & 0 & 0 \\ 0 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$\|A^{-1}.A = I\|$

Bagaimana $A.A^{-1}$ **?**

$$A.A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix} X \frac{1}{28}\begin{bmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 22 & -16 & 7 \\ -6 & 12 & -7 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{28}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 22 & -16 & 7 \\ -6 & 12 & -7 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{28}\begin{bmatrix} 28 & 0 & 0 \\ 0 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$\|A.A^{-1} = A^{-1}.A = I\|$

PEMECAHAN SISTEM PERSAMAAN LINIER

Tinjaulah sistem persamaan linier

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

System persamaan diatas dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Yaitu

$$\boldsymbol{A.x = b}$$

dengan

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} ; \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} ; \boldsymbol{dan\ b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Maka dapat diselesaikan dengan

$\boldsymbol{A^{-1}.A.x = A^{-1}.b}$; **karena** $\boldsymbol{A^{-1}.A = I}$

$$\boldsymbol{I.x = A^{-1}.b}$$

$$\| \boldsymbol{x = A^{-1}.b} \|$$