BAB IX

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

Dalam persoalan teknik, sering dijumpai persamaan dalam bentuk:

$$A.x = \lambda x$$

dengan $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ adalah matriks bujur sangkar dan λ adalah bilangan skalar. Untuk solusi non-trivial , yaitu $x \neq 0$, harga λ yang memenuhi persamaan itu disebut **nilai eigen**, atau *nilai karakteristik* atau *akar laten* dari matriks A, dan solusi yang bersesuain dengan $A.x = \lambda x$ disebut **vektor eigen** atau *vektor karakteristik* dari A.

Bila persamaan diatas dinyatakan dalam bentuk sistem persamaan yang terpisah, diperoleh:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots\ldots a_{2n} \\ . & . & . \quad\quad . \\ . & . & . \quad\quad . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots\ldots a_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

Yaitu:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots \; a_{1n}x_n &= \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots \; a_{2n}x_n &= \lambda x_2 \\ . \quad\quad . \quad\quad . \quad\quad . \\ . \quad\quad . \quad\quad . \quad\quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots \; a_{nn}x_n &= \lambda x_n \end{aligned}$$

Bila ruas kanan dipindahkan ke ruas kiri, persamaan menjadi:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots \; a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots\ldots \; a_{2n}x_n &= 0 \\ . \quad\quad . \quad\quad . \quad\quad . \\ . \quad\quad . \quad\quad . \quad\quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots \; (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0 \end{aligned}$$

Yaitu:

$$\begin{bmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & a_{13}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & a_{23}\cdots\cdots a_{2n} \\ . & . & . \quad . \\ . & . & . \quad . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\cdots\cdots(a_{nn}-\lambda) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

$A.x = \lambda x$ menjadi $A.x - \lambda x = 0 \rightarrow (A - \lambda I)x = 0$

Agar sistem persamaan linier homogen ini mempunyai solusi non-trivial, maka haruslah: $|A - \lambda I| = 0$

$$|A - \lambda I| = \begin{bmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & a_{13}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & a_{23}\cdots\cdots a_{2n} \\ . & . & . \quad . \\ . & . & . \quad . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\cdots\cdots(a_{nn}-\lambda) \end{bmatrix} = 0$$

$|A - \lambda I|$ disebut *determinan karakteristik* dari A dan $|A - \lambda I| = 0$ disebut *persamaan karakteristik*.

CONTOH:

- Carilah nilai eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Solusi:

Determinan karakteriktik: $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} (4-\lambda) & -1 \\ 2 & (1-\lambda) \end{vmatrix}$

Persamaan karakteristik: $|A - \lambda I| = 0$

$(4-\lambda)(1-\lambda) + 2 = 0 \rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \rightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$

$\lambda_1 = 2; \qquad \lambda_2 = 3$

❖ Carilah nilai eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 10 & -5 \end{bmatrix}$

Persamaan karakteristik: $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} (2-\lambda) & 3 & -2 \\ 1 & (4-\lambda) & -2 \\ 2 & 10 & (-5-\lambda) \end{vmatrix} = 0$

$(1+\lambda)(1-\lambda)^2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -1;\ \lambda_2 = 1;\ \lambda_3 = 1$

Latihan:

Tentukan nilai eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Vektor eigen

Untuk setiap nilai eigen yang diperoleh terdapat suatu solusi x yang bersesuain dengannya, yang disebut vektor eigen. Dalam bahasa matriks, istilah vektor menyatakan matriks baris atau matriks kolom.

Contoh:

Tinjau suatu persamaan **A.x** = λ **x** dengan $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Persamaan karakteristiknya adalah: $\begin{vmatrix} (4-\lambda) & 1 \\ 3 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = 0$

$(4-\lambda)(2-\lambda) - 3 = 0 \rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 5) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 5$

❖ Untuk $\lambda_1 = 1$, persamaan **A.x** = λ **x** menjadi:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 1. \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x_1 + x_2 = x_1 \\ 3x_1 + 2x_2 = x_2 \end{array} \right\} \text{persamaan yang}$$

manapun akan memberikan $x_2 = -3x_1$. Hasil ini menyatakan bahwa berapapun nilai x_1 , nilai x_2 selalu 3 kalinya. Dengan demikian vektor eigen dalam bentuk $x_1 = \begin{bmatrix} k \\ -3k \end{bmatrix}$ merupakan bentuk umum dari sekian banyak vektor eigen. Vektor yang paling sederhana adalah

$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

❖ Untuk $\lambda_2 = 5$, persamaan **A.x** = λ **x** menjadi:

$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 5. \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} 4x_1 + x_2 = 5x_1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 5x_2 \end{matrix}\right\}$ persamaan yang manapun akan memberikan $x_1 = x_2$; Jadi untuk $\lambda_2 = 5 \rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Kesimpulan:

$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen yang bersesuain dengan $\lambda_1 = 1$

$x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen yang bersesuain dengan $\lambda_2 = 5$

Contoh:

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen untuk suatu persamaan **A.x** = λ **x** dengan $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Solusi:

Persamaan karakteristiknya adalah: $\begin{vmatrix} (2-\lambda) & 0 & 1 \\ -1 & (4-\lambda) & -1 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$(2-\lambda)\{-\lambda(4-\lambda)+2\}+1\{-2+(4-\lambda)\}=0$$

$$(2-\lambda)\{\lambda^2-4\lambda+3\}=0 \rightarrow \lambda = 1,2,3$$

❖ Untuk $\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 + x_3 = 0 \rightarrow x_1 = -x_3$

$-x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \rightarrow -x_1 + 2x_2 + x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 0$

$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen yang bersesuain dengan $\lambda_1 = 1$

- Untuk $\lambda_2 = 2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_3 = 0; \; -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \rightarrow x_1 = 2x_2$

$x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen yang bersesuain dengan $\lambda_2 = 2$

- Untuk $\lambda_3 = 3$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-x_1 + x_3 = 0; \rightarrow x_3 = x_1$

$-x_1 + x_2 - x_3 = 0 \rightarrow -2x_1 + x_2 = 0 \rightarrow x_2 = 2x_1$

$x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen yang bersesuain dengan $\lambda_3 = 3$

Kesimpulan:

$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen yang bersesuain dengan nilai eigen $\lambda_1 = 1$

$x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen yang bersesuain dengan nilai eigen $\lambda_2 = 2$

$x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen yang bersesuain dengan nilai eigen $\lambda_3 = 3$

LATIHAN:

1. Tentukan nilai eigen dan vektor eigen untuk suatu persamaan **A.x** = **λ x**

   dengan $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

2. Tentukan nilai eigen dan vektor eigen untuk suatu persamaan **A.x** = **λ x**

   dengan $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$