BAB I

PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA ORDE SATU

Definisi:

Persamaan diferensial adalah suatu hubungan yang terdapat antara suatu variabel independen x, suatu variabel dependen y, dan satu atau lebih turunan y terhadap x.

Orde dari suatu persamaan diferensial ditentukan oleh turunan tertinggi dalam persamaan tersebut.

Contoh:

$x\frac{dy}{dx} - y^2 = 0 \quad \rightarrow \; persamaan\ diferensial\ orde\ satu$

$xy\frac{d^2y}{dx^2} - y^2 \sin x = 0 \quad \rightarrow \; persamaan\ diferensial\ orde\text{-}dua$

$\frac{d^3y}{dx^3} - y\frac{dy}{dx} + e^{4x} = 0 \quad \rightarrow \; persamaan\ diferensial\ orde\text{-}tiga$

<u>Proses Pembentukan Persamaan Diferensial</u>

Contoh: $y = A\sin x + B\cos x$ **A, B =konstanta sembarang**

$$\frac{dy}{dx} = A\cos x - B\sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -A\sin x - B\cos x$$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -y \quad \rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \qquad (persamaan\ diferensial\ orde\text{-}dua)$

Contoh:

Bentuk sebuah persamaan diferensial dari fungsi $\quad y = x + \frac{A}{x}$

Solusi: $y = x + \frac{A}{x} = x + Ax^{-1}$

$$\therefore \; \frac{dy}{dx} = 1 - Ax^{-2} = 1 - \frac{A}{x^2}$$

dari persamaan diatas

$$\frac{A}{x} = y - x \qquad \rightarrow A = x(y - x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{x(y-x)}{x^2} = 1 - \frac{y-x}{x} = \frac{x-y+x}{x} = \frac{2x-y}{x}$$

$$x\frac{dy}{dx} = 2x - y \qquad \rightarrow \ \textit{persamaan diferensial orde satu}$$

Contoh: **Bentuklah persamaan direfensial untuk** $y = Ax^2 + Bx$

Solusi:

$$y = Ax^2 + Bx$$

$$\frac{dy}{dx} = 2Ax + B$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2A \quad \rightarrow \quad A = \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}$$

Substitusi $\rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{d^2y}{dx^2} + B$

$$B = \frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$y = x^2\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

$$= \frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - x^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\therefore y = x\frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}$$

Catatan:

Fungsi dengan 1 konstanta sembarang menghasilkan persamaan orde-satu

Fungsi dengan 2 konstanta sembarang menghasilkan persamaan orde-dua

<u>Penyelesaian Persamaan Diferensial</u>

Penyelesaian Persamaan Diferensial $\rightarrow$ **manipulasi persamaan tersebut sehingga seluruh turunannya hilang dan harga menyisakan hubungan antara x dan y.**

<u>Metode 1</u> : Dengan integrasi secara langsung

Bila persamaan dalam bentuk y'=f(x), maka persamaan tersebut dapat diselesaikan dengan integrasi sederhana

Catatan → selanjutnya $\frac{dy}{dx}$ ditulis y '

$\frac{d^2y}{dx^2}$ ditulis y "

Contoh:

$$y' = 3x^3 - 6x + 5$$

$$y = \int (3x^2 - 6x + 5)dx = x^3 - 3x^2 + 5x + C$$

$$y = x^3 - 3x^2 + 5x + C$$

Contoh:

$$xy' = 5x^3 + 4$$

$$y' = 5x^2 + \frac{4}{x} \quad \rightarrow y = \int \left(5x^2 + \frac{4}{x}\right) dx$$

$$y = \frac{5}{3}x^3 + 4\ln x + C$$

Contoh: Tentukan penyelesaian khusus dari persamaan $e^x y' = 4 \quad \rightarrow y' = \frac{4}{e^x}$

$$y = \int \left(\frac{4}{e^x}\right) dx = \int 4e^{-x} dx = -4e^{-x} + C$$

Masukkan nilai $x = 0 \quad \rightarrow y = 3$

$$3 = -4e^{-0} + C \quad \rightarrow C = 7$$

$$\therefore y = -4e^{-x} + 7$$

<u>Metode 2:</u> Dengan pemisahan variabel

Bila persamaan yang diberikan berbentuk $y' = f(x, y)$, variabel y di sisi kanan menyebabkan persamaan tersebut tidak dapat diselesaikan dengan integrasi langsung.

Contoh: $y' = \frac{2x}{y+1} \quad \rightarrow (y + 1)y' = 2x$

$$\int (y+1)dy = \int 2x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} + y = x^2 + C$$

Contoh:

$$y' = (1+x)(1+y)$$

$$\frac{1}{(1+y)}y' = (1+x)$$

$$\int \frac{1}{(1+y)}dy = \int (1+x)dx \quad \rightarrow \ln(1+y) = x + \frac{x^2}{2} + C$$

Contoh: $y' = \frac{y^2+xy^2}{x^2y-x^2} \;\rightarrow\; y' = \frac{y^2+xy^2}{x^2y-x^2}$

$$y' = \frac{y^2(1+x)}{x^2(y-1)} \quad \rightarrow \frac{y-1}{y^2}dy = \frac{(1+x)}{x^2}dx$$

$$\int \frac{y-1}{y^2}dy = \int \frac{(1+x)}{x^2}dx \quad \rightarrow \int \left(\frac{1}{y} - y^{-2}\right)dy = \int \left(x^{-2} + \frac{1}{x}\right)dx$$

$$\therefore \ln y + y^{-1} = -x^{-1} + \ln x + C$$

$$\therefore \ln y + \frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + \ln x + C$$

Contoh: $y' = \frac{y-1}{x} \quad \rightarrow \frac{1}{y-1}dy = \frac{1}{x}dx$

$$\int \frac{1}{y-1}dy = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\ln y - 1 = \ln x + C$$

Contoh: $xyy' = \frac{x^2+1}{y+1}$

$$y(y+1)y' = \frac{x^2+1}{x} \quad \rightarrow \int (y^2+y)dy = \int \left(x + \frac{1}{x}\right)dx$$

$$\rightarrow \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \ln x + C$$

Contoh: $y \tan x . y' = (4 + y^2)\sec^2 x$

$$\frac{y}{4+y^2} y' = \frac{\sec^2 x}{\tan x} \quad \rightarrow \quad \int \left(\frac{y}{4+y^2}\right) dy = \int \left(\frac{\sec^2 x}{\tan x}\right) dx$$

$$\frac{1}{2} \ln(y + y^2) = \ln \tan x + C$$

<u>PERSAMAAN HOMOGEN DENGAN SUBSTITUSI $y = vx$</u>

Contoh: $y' = \frac{x+3y}{2x}$

Persamaan tersebut tidak dapat dinyatakan sisi kanan dan sisi kiri dalam bentuk "factor x" dan "factor y". Dalam kasus ini kita menggunakan substitu $y = vx$ si , dimana v adalah fungsi dari x.

Bila $y = vx$ didefinisikan, maka

$$\frac{dy}{dx} = v.1 + x\,\frac{dv}{dx} \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

Sehingga

$$\frac{x+3y}{2x} = \frac{x+3vx}{2x} = \frac{1+3v}{2}; \text{ sehingga persamaan menjadi}$$

$$v + x\frac{dy}{dx} = \frac{1+3v}{2} \quad \rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{1+3v}{2} - v = \frac{1+3v-2v}{2} = \frac{1+v}{2}$$

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{1+v}{2} \quad \rightarrow \quad \int \frac{2}{1+v}\,dv = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$2\ln(1+v) = \ln x + C = \ln x + \ln A$$

$$(1+v)^2 = Ax; \text{ tetapi } \; y = vx \quad \rightarrow v = \frac{y}{x}$$

$$\therefore \left(1 + \frac{y}{x}\right)^2 = Ax \quad \rightarrow \quad (x+y)^2 = Ax^3$$

Catatan: $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$; *persamaan homogen*

Substitusi $y = vx \;\rightarrow\; \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$$\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{x^2+v^2x^2}{vx^2}=\frac{1+v^2}{v}$$

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{v} \quad \rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{v}-v=\frac{1+v^2-v^2}{v}=\frac{1}{v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1}{v} \quad \rightarrow v.dv=\frac{1}{x}dx \quad \rightarrow \int vdv=\int\frac{1}{x}dv$$

$$\frac{v^2}{2}=\ln x+C \quad \rightarrow \frac{1}{2}(\frac{y}{x})^2=\ln x+C$$

$$y^2=2x^2(\ln x+C)$$

Catatan: $y'=\frac{2xy+3y^2}{x^2+2xy}; persamaan\ homogen$

Substitusi $y=vx \rightarrow \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$

$$\frac{2xy+3y^2}{x^2+2xy}=\frac{2vx^2+3v^2x^2}{x^2+2vx^2}=\frac{2v+3v^2}{1+2v}$$

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{2v+3v^2}{1+2v} \quad \rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{2v+3v^2}{1+2v}-v$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{2v+3v^2-v-2v^2}{1+2v}=\frac{v+v^2}{1+2v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{v+v^2}{1+2v} \quad \rightarrow \int\frac{1+2v}{v+v^2}dv=\int\frac{1}{x}dv$$

$$\ln(v+v^2)=\ln x+C=\ln x+\ln C$$

$$v+v^2=Ax$$

Karena

$$y=vx \quad \rightarrow v=\frac{y}{x}$$

$$\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}=Ax \quad \rightarrow xy+y^2=Ax^3$$

Contoh: $(x^2+y^2)y'=xy$

$$y'=\frac{xy}{(x^2+y^2)}; substitusi \quad y=vx$$

$$y = vx \quad \rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{vx^2}{x^2 + v^2x^2} = \frac{v}{1 + v^2}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1 + v^2} \quad \rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1 + v^2} - v = \frac{v - v - v^3}{1 + v^2}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-v^3}{1 + v^2} \quad \rightarrow \int \left(\frac{1 + v^2}{v^3}\right) dv = -\int \frac{1}{x} dx$$

$$\int \left(v^{-3} + \frac{1}{v}\right) dv = -\ln x + C \quad \rightarrow \frac{-v^{-2}}{2} + \ln v = -\ln x + \ln A$$

$$\ln v + \ln x + \ln K = \frac{1}{2v^2} \quad (\ln K = -\ln A)$$

$$\ln Kvx = \frac{1}{2v^2} \quad \rightarrow t\ api\ \ y = vx \ \rightarrow v = \frac{y}{x}$$

$$\ln Ky = \frac{x^2}{2y^2} \quad \rightarrow 2y^2 \ln Ky = x^2$$

<u>Keujudan dan Ketunggalan</u>

Dibagian sebelumnya kita lihat bahwa persamaan diferensial orde satu terjadi dalam banyak model. Tentu saja model itu berguna bila persamaan diferensial yang dihasilkan dapat diselesaikan secara eksplisit, atau paling sedikit jika kita dapat menemukan teknik yang beraneka ragam untuk menyelesaikan suatu PD, akan sangat bermanfaat mengetahui apakah PD itu mempunyai penyelesaian atau tidak. Yaitu, apakah PD itu ujud? Sebagai contoh PD, $(y')^2 + y^2 + 1 = 0$ tidak mempunyai penyelesaikan real, karena ruas kiri selalu positif,

Bentuk umum persamaan diferensial orde satu adalah

$$y' = F(x, y) \ldots\ldots\ldots (1)$$

Bila kita ketahui nilai y_0 pada saat x_0, atau

$$y(x_0) = y_0 \ldots\ldots\ldots . (2)$$

Maka kita akan dapat mengetahui kedudukan/nilai y pada x berikutnya dan y akan bergerak pada lintasan tunggal. Ini berarti, PD pada pers (1) mempunyai penyelesaian yang memenuhi syarat (2), dan PD itu mempunyai hanya <u>satu penyelesaian</u>.

Syarat (2) disebut <u>syarat awal</u>; dan pers (1) dan syarat (2) disebut <u>MASALAH NILAI AWAL (MNA)</u> atau <u>Initial Value Problem.</u>

<u>PERSAMAAN LINEAR – Penggunaan Faktor Integrasi</u>

Tinjau persamaan $y' + 5y = e^{2x}$

Metode sebelumnya tidak dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan ini.

→ kalikan kedua sisi dengan e^{5x}

$$\underbrace{e^{5x}.\,y' + y.\,5e^{5x}} = e^{2x}.\,e^{5x} = e^{7x}$$

Merupakan turunan dari $y.\,e^{5x}$

$$\frac{d}{dx}\{y.\,e^{5x}\} = e^{7x} \qquad \to \; y.\,e^{5x} = \int e^{7x}\,dx = \frac{e^{7x}}{7} + C$$

$$\therefore\; y = \frac{e^{7x}}{7} + C\,e^{-5x}$$

Persamaan diatas dapat dinyatakan dalam bentuk $y' + Py = Q$; **persamaan ini disebut <u>persamaan linear orde pertama.</u>**

Untuk menyelesaikan persamaan ini, kalikan kedua sisi dengan sebuah <u>factor integrasi</u> yang selalu berbentuk $e^{\int Pdx}$**. Hal ini akan mengubah sisi kiri menjadi turunan dari hasil kali.**

Dari contoh sebelumnya $y' + 5y = e^{2x}$; **P = 5**

$\int Pdx = 5x$ → **faktor integrasinya adalah** e^{5x}**.**

Contoh: $y' - y = x \;\to\; y' + Py = Q$ **(P=-1; Q=x)**

Factor integrasi $e^{\int Pdx} \;\to\; \int Pdx = -\int dx = -x$

Jadi factor integrasi → e^{-x}

Kalikan kedua sisi dengan e^{-x}

$$\to\; e^{-x}.\,y' - y.\,e^{-x} = x.\,e^{-x}$$

$$\frac{d}{dx}\{e^{-x}.\,y\} = x.\,e^{-x} \;\to y.\,e^{-x} = \int x.\,e^{-x}dx$$

Integral disisi kanan dapat diselesaikan dengan integrasi perbagian.

$$\int u.dv = u.v - \int vdv$$

$$y.e^{-x} = x(-e^{-x}) + \int e^{-x}dx = -x.e^{-x} - e^{-x} + C$$

$$y = -x - 1 + C\ e^{x}$$

Tinjau $y' + Py = Q$; **dimana P&Q fungsi dari x**

Faktor integral $= FI = e^{\int Pdx}$

$$\underbrace{y'.e^{\int Pdx} + Py.e^{\int Pdx}} = Q.e^{\int Pdx}$$

Turunan dari $y.e^{\int Pdx}$

$$\frac{d}{dx}\left\{y.e^{\int Pdx}\right\} = Q.e^{\int Pdx} \quad \rightarrow di\ integrasikan\ terhadap\ x$$

$$y.e^{\int Pdx} = \int Q.e^{\int Pdx}dx$$

$$\downarrow$$

$$y = FI = \int Q.FI\ dx$$

Definisi Dasar Logaritma

$e^{\ln(fungsi)} = fungsi$	$e^{2\ln x} = e^{\ln(x^2)} = x^2$
$e^{\ln F} = F$	$e^{3\ln \sin x} = e^{\ln(\sin^3 x)} = \sin^3 x$
$e^{\ln \sin x} = \sin x$	$e^{-\ln x} = e^{\ln(x^{-1})} = x^{-1} = \frac{1}{x}$

Contoh: $x.y' - 2y = -x^2$

Solusi: bagi kedua sisi dengan x

$$y' - \frac{2}{x}y = -x \quad \rightarrow y' + P.y = Q$$

$$P = -\frac{2}{x}; Q = -x$$

Gunakan rumus $y.FI = \int Q.FI.dx$

$$FI = e^{\int P dx} = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

$$y.\frac{1}{x^2} = -\int x\frac{1}{x^2}dx = -\int \frac{1}{x}dx = -\ln x + C$$

Contoh: $y' + y.\cot\ x = \cos\ x$

Selesaikan persamaan diferensial tersebut

$$y' + y.\cot\ x = \cos\ x \quad \rightarrow y' + P.y = Q$$

$$P = \cot\ x; Q = \cos\ x$$

$$FI = e^{\int P dx} = e^{\int \cot\ x\, dx} = e^{\int \frac{\cos x}{\sin x} dx} = e^{\ln \sin x} = \sin x$$

$$y.FI = \int Q.FI.dx \quad \rightarrow y.\sin x = \int \cos x.\sin x.dx$$

$$y.\sin x = \frac{1}{2}\sin^2 x + C \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{C}{\sin x}$$

$$y = \frac{1}{2}\sin^2 x + C\ \mathrm{cosec}\ x$$

Contoh: Selesaikan PD berikut

$$(x+1)y' + y = (x+1)^2$$

Solusi: Bagi kedua sisi dengan $x + 1$

$$y' + \frac{1}{x+1}.y = (x+1) \quad \rightarrow P = \frac{1}{x+1}; Q = (x+1)$$

$$FI = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{1}{x+1} dx} = e^{\ln(x+1)} = x+1$$

$$y.FI = \int Q.FI.dx \quad \rightarrow y.(x+1) = \int (x+1)(x+1)dx$$

$$y.(x+1) = \int (x+1)^2 dx = \frac{(x+1)^3}{3} + C$$

$$y = \frac{(x+1)^3}{3} + \frac{C}{x+1}$$

Contoh: selesaikan persamaan diferensial berikut

$xy' - 5y = x^7$

Solusi:

$xy' - 5y = x^7 \quad \rightarrow bagi\ kedua\ sisi\ dengan\ x$

$y' - \frac{5}{x}y = x^6 \quad \rightarrow P = -\frac{5}{x}; Q = x^6$

$\int Pdx = \int -\frac{5}{x}dx = -5\ln x$

$FI = e^{\int Pdx} = e^{-5\ln x} = e^{\ln x^{-5}} = x^{-5} = \frac{1}{x^5}$

$y.FI = \int Q.FI.dx \quad \rightarrow y.\frac{1}{x^5} = \int x^6\frac{1}{x^5}dx = \int x\,dx$

$y.\frac{1}{x^5} = \frac{1}{2}x^2 + C \quad \rightarrow y = \frac{x^7}{2} + Cx^5$

Contoh: carilah penyelesaian masalah nilai awal (MNA) atau Initial Value Problem

$y' - 2xy = x; \quad y(0) = 0$

Solusi: $y' - 2xy = x \quad \rightarrow P = -2x; Q = x$

$FI = e^{\int Pdx} = e^{-\int 2xdx} = e^{-x^2}$

$y.FI = \int Q.FI.dx = \int x.e^{-x^2}dx$

$y.e^{-x^2} = \int x.e^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$

$y = -\frac{1}{2} + \frac{C}{e^{-x^2}} \quad \rightarrow y = -\frac{1}{2} + C.e^{x^2}$

$y(0) = 0 \quad \rightarrow 0 = -\frac{1}{2} + C.e^0 \quad \rightarrow \quad C = \frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{x^2}$

Contoh: selesaikan PD berikut:

$(1 - x^2)y' - xy = 1$

Solusi: kita bagi kedua sisi $1 - x^2$

$$y' - \frac{x}{1-x^2} y = \frac{1}{1-x^2} \qquad \rightarrow P = \frac{-x}{1-x^2}; Q = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\int P dx = \int \frac{-x}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1-x^2)$$

$$FI = e^{\frac{1}{2}\ln(1-x^2)} = e^{\ln(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$y.FI = \int Q.FI.dx \qquad \rightarrow y.\sqrt{1-x^2} = \int \frac{1}{1-x^2}\sqrt{1-x^2}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$y.\sqrt{1-x^2} = \sin^{-1} x + C$$

Contoh: selesaikan persamaan $(x-2)y' - y = (x-2)^3$; jika diketahui $y = 10$ untuk $x = 4$

Solusi: $(x-2)y' - y = (x-2)^3$; bagi kedua sisi $x - 2$

$$y' - \frac{1}{x-2} y = (x-2)^2; \quad P = -\frac{1}{x-2}; Q = (x-2)^2$$

$$\int P dx = \int \frac{-1}{x-2} dx = -\ln(x-2)$$

$$FI = e^{-\ln(x-2)} = e^{\ln(x-2)^{-1}} = (x-2)^{-1} = \frac{1}{x-2}$$

$$y\frac{1}{x-2} = \int (x-2)^2 \frac{1}{x-2} dx = \int (x-2) dx = \frac{(x-2)^2}{2} + C$$

$$\rightarrow y = \frac{(x-2)^2}{2} + C(x-2)$$

$$x = 4; y = 10 \qquad \rightarrow 10 = \frac{8}{2} + C\,2 \rightarrow C = 3$$

$$2y = (x-2)^3 + 6(x-2)$$

<u>PERSAMAAN BERNOULLI</u>

Persamaan Bernoulli:

$y' + P.y = Q.y^n$ **P & Q fungsi dari x**

Bagi kedua sisi dengan y^n;

$y^{-n}y' + P.y^{1-n} = Q, \dots\dots\dots (1)$

Masukkan $z = y^{1-n} \quad \rightarrow \frac{dy}{dx} = (1-n).y^{1-n}.\frac{dy}{dx}$

Jika persamaan (1) dikalikan dengan $(1-n)$ **menjadi**

$(1-n)y^{-n}y' + (1-n)Py^{1-n} = (1-n)Q,$

$\frac{dz}{dx} + P_1 z = Q_1$; **dimana** $P_1 \& Q_1$ **adalah fungsi dari x. selanjutnya dapat diselesaikan dengan menggunakan sebuah factor integrasi.**

Contoh:

Selesaikan $\frac{dy}{dx} - y = e^{-x}y^2$

Solusi: bagi kedua sisi dengan y^2**, didapat** $y^{-2}\frac{dy}{dx} - y^{-1} = e^{-x} \dots\dots (*)$

Bila $z = y^{1-n} = y^{1-2} = y^{-1}$

$$z = y^{-1} \quad \rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}.\frac{dy}{dx} = -y^{-2}.\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = -y^{-2}.\frac{dy}{dx}$$

Maka persamaan (*) menjadi

$$-\frac{dz}{dx} - z = e^{-x} \quad \rightarrow \frac{dz}{dx} + z = -e^{-x}$$

$$\frac{dz}{dx} + z = -e^{-x} \quad \rightarrow identik\ dengan \quad \frac{dz}{dx} + Pz = Q$$

$$P = 1; Q = -e^{-x} \quad \rightarrow maka\ bisa\ menggunakan\ faktor\ integrasi$$

$$FI = e^{\int Pdx} = e^{\int dx} = e^{x}$$

$$z.FI = \int Q.FI.dx \quad \rightarrow z.e^{x} = -\int e^{-x}.e^{x}dx$$

$$z.e^{x} = -\int dx = -x + C; \ karena\ z = y^{-1}, maka\ y^{-1}.e^{x} = -x + C$$

$$\rightarrow y = \frac{e^{x}}{C-x}$$

Bila kita cek kembali untuk melihat apakah y menyelesaikan persamaan asal

$y = \frac{e^x}{C-x}$ $\rightarrow$ *ingat rumus* $y = \frac{u}{v}$; $y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

maka: $\frac{dy}{dx} = \frac{(C-x)e^x + e^x}{(C-x)^2} = \frac{e^x}{(C-x)} + \frac{e^x}{(C-x)^2}$

$$\frac{dy}{dx} = y + \frac{e^{-x}e^{x^2}}{(C-x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = y + e^{-x}\left[\frac{e^x}{(-x)}\right]^2 = y + e^{-x}.y^2$$

$\frac{dy}{dx} - y = e^{-x}.y^2$ $\rightarrow$**sesuai dengan soal**

Contoh: selesaikan persamaan berikut

$$x^2y - x^3\frac{dy}{dx} = y^4\cos x$$

Solusi: $\rightarrow$ **solusi dasar** $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$

Bagi kedua sisi dengan $(-x^3)$ **menghasilkan** $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = \frac{-y^4\cos x}{x^3}$;

Bagi kedua sisi dengan y^4

$$y^{-4}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y^{-3} = \frac{-\cos x}{x^3} \ldots\ldots\ldots(*)$$

Misal $z = y^{1-n} = y^{-3}$ $\rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}.\frac{dy}{dx} = -3y^{-4}\frac{dy}{dx}$

Kalikan persamaan (*) dengan -3; maka

$$-3y^{-4}\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x}y^{-3} = \frac{\cos x}{x^3} \quad \rightarrow \frac{dz}{dx} + \frac{3}{x}z = \frac{\cos x}{x^3}$$

Selesaikan persamaan dengan metode FI; $P = \frac{3}{X}$; $Q = \frac{3\cos x}{x^3}$

$$FI = e^{\int Pdx} = e^{\int\frac{3}{x}dx} = e^{3\ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$$

$$z\,FI = \int Q.FI.dx \quad \rightarrow z\,x^3 = \int \frac{3\cos x}{x^3}x^3dx$$

$$z\,x^3 = \int 3\cos x\,dx = 3\sin x + C$$

Karena $z = y^{-3}$**, maka** $y^{-3}x^3 = 3\sin x + C$

$$\frac{x^3}{y^3} = 3\sin x + C \quad \rightarrow y^3 = \frac{x^3}{3\sin x + C}$$

$$\therefore y^3 = \frac{x^3}{3\sin x + C}$$

Contoh: selesaikan $y - 2x + \frac{dy}{dx} = x(x+1)y^3$

Solusi: bagi kedua sisi dengan $-2x$

$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x}y = -\frac{(x+1)}{2}y^3$**; merupakan bentuk dasar** $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$

Bagi kedua sisi dengan y^3

$$y^{-3}.\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x}y^{-2} = -\frac{(x+1)}{2} \qquad (*), bila\ z = y^{1-n} = y^{-2}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}.\frac{dy}{dx} = -2y^{-3}.\frac{dy}{dx}$$

Kalikan $(*)$ **dengan** (-2) $\rightarrow$

$$-2y^{-3}.\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y^{-2} = (x+1) \quad \rightarrow \frac{dz}{dx} + \frac{1}{x}.z = x + 1$$

Selesaikan dengan factor integral; $P = \frac{1}{x}; Q = x + 1$

$$FI = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

$$z.FI = \int Q.FI.dx \quad \rightarrow z.x = \int (x+1)x\,dx = \int (x^2 + x)\,dx$$

$z.x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C;$ **karena** $z = y^{-2}$

$$y^{-2}.x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C \quad \rightarrow \frac{x}{y^2} = \frac{2x^3 + 3x + A}{6}; A = 6C$$

$$y^2 = \frac{6x}{2x^3 + 3x^2 + A}$$