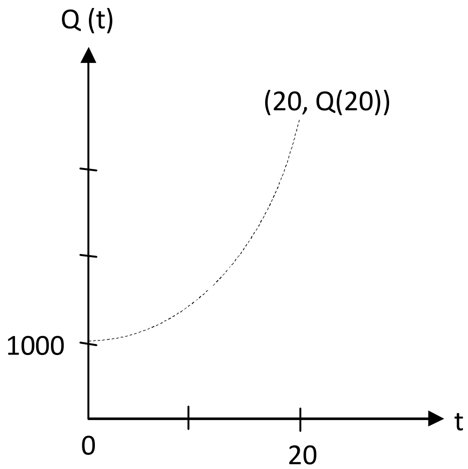
BAB IV
PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL SECARA NUMERIK

4.1. <u>METODE EULER</u>

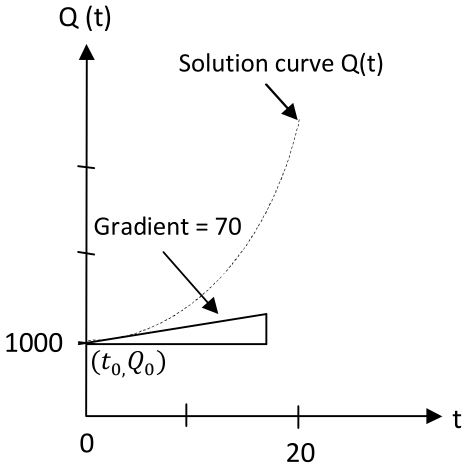
Pertimbangkan masalah menentukan nilai uang saat ini dan akan datang dengan menggunakan suku bunga misalkan pada saat $t = 0, \$1000$ didepositokan dengan tingkat suku bunga 7%. Kita ingin mengetahui berapa jumlah uang pada saat $t = 20$.

Bila $Q\,(t)$ adalah jumlah uang pada saat tahun ke t. Maka tingkat perubahan $Q\,(t)$ adalah

$$\frac{dQ}{dt} = 0,07Q\,, \quad Q(0) = 1000\$, \quad 0 \leq t \geq 20$$



Kita ini mencari $Q(t)$ yang menyelesaikan masalah nilai awal.



Pada titik $(0, 1000)$, turunannya adalah $\frac{dQ}{dt} = 0,07(1000) = 70$

Karena kita tidak tahu $Q\,(t)$, maka nilai eksak $Q\,(20)$ belum bisa ditentukan. Tetapi hal ini bisa didekati dengan <u>nilai garis tangen</u> bila $t = 20$ persamaan garis tangen adalah

$$T - 1000 = 70\,(t - 0)$$

$$T = Q_0 + \frac{dQ}{dt}\bigg|_{t=t_0} \Delta t$$

Dimana $t_0 = 0, Q_0 = 1000$, $\frac{dQ}{dt}\Big|_{t=0}^{70}$ atau $\Delta t = 20 - 0 = 20$

Maka $T(20) = 1000 + 70(20) = 2400$.

Nilai pendekatan $Q(20) = 2400 = T\,(20) = 2400$

<u>Menggunakan Dua Langkah untuk memperbaiki perkiraan</u>

Hasil sebelumnya diperoleh berdasarkan nilai awal $Q(0) = \$1000$. Hasil tersebut dapat diperbaiki dengan pembagian menjadi 2 langkah, yakni dengan membuat titik tengah $\Delta t = \frac{20}{2} = 10$

Didapatkan hasil berikut:

$$Q(10) \approx Q_t = Q_0 + \frac{dQ}{dt}\Big|_{t=0}\Delta t = 1000 + 70(10) = 1700$$

Selanjutnya, menggunakan estimasi $Q(10) = 1700$ untuk mendekati turunan pada $t = 10$ dan rumus $\frac{dQ}{dt}\Big|_{t=0} = 0,07Q(10)$

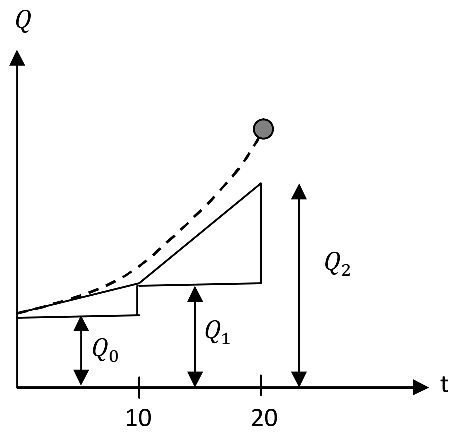
Hitung $Q(20)$:

$$Q(20) \approx Q_2 = Q_1 + \frac{dQ}{dt}\Big|_{t=0}\Delta t$$

$$= Q_1 + 0,07Q(10)\,\Delta t$$

$$= 1700 + 0,07(1700)(10)$$

$$= 2890$$



Dari prosedur contoh sebelumnya

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y), \qquad y(y_0) = Y_0\,, \qquad x_0 \le x \ge b$$

Langkah Prosedur Euter

Langkah 1 : bagi interval $x_0 \le x \ge b$ menjadi subinterval

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x,$$

.

.

$$\Delta x_n = x_{n-1} + \Delta x = b$$

Langkah 2 : Cari pendekatan dari urutan berikut :

$$y_1 = y_0 + g(x_0, y_0)\Delta x$$

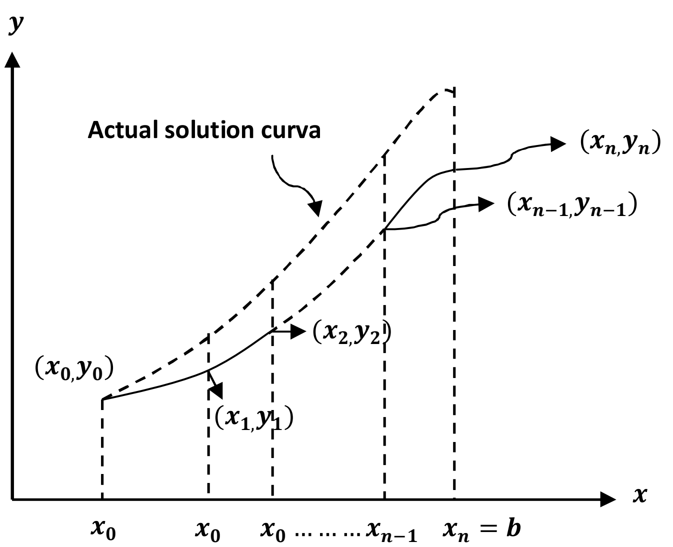
$$y_2 = y_1 + g(x_1, y_1)\Delta x$$

.

.

$$y_n = y_{n-1} + g(x_{n-1}, y_{n-1})\Delta x$$

Catatan : ada kesalahan (error) pada setiap langkah



Penyelesaian Secara Analitis

$$\frac{dQ}{dt} = 0,07Q \ , \ \ Q(0) = 1000 \ , \quad 0 \leq t \geq 20$$

Solusi umum : $Q = C_1 . e^{0,07t}$

Karena $Q(0) = 1000 \quad \rightarrow C_1 = 1000$ **; maka**

$$Q = 1000 . e^{0,07t}$$

Pada $t = 20 \quad \rightarrow , \ Q(20) = 4055.20 \ ;$ **(secara analitis)**

Bandingkan dengan cara pendekatan

$\Delta t = 20 \qquad \rightarrow Q(20) = 2400$

$\Delta t = 10 \qquad \rightarrow Q(20) = 2890$

$\Delta t = 1 \qquad \rightarrow Q(20) = 3869,68$

Hasil mendekati, bila Δt semakin kecil.

Tabel : Perbandingan Solusi Numerik dengan Nilai Aktual.

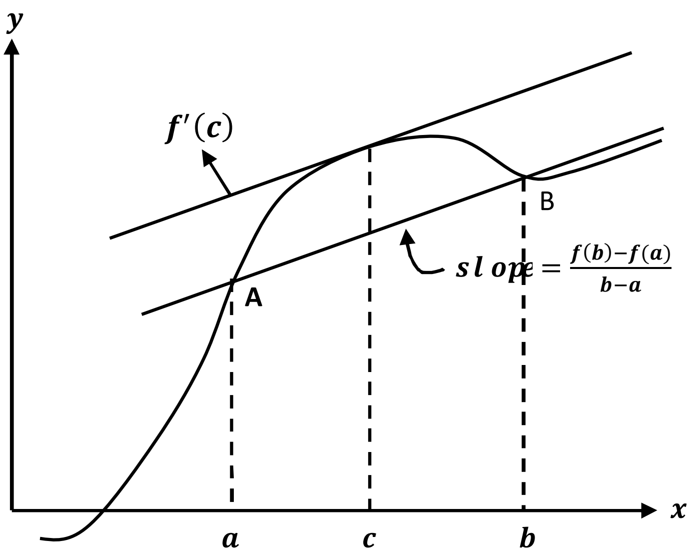
dQ/dt=0,07Q , Q(0)=1000 , Δt=1							
t	Euler Q(t)	Actual Q(t)	Absolute Error	t	Euler Q(t)	Actual Q(t)	Absolute Error
0	1000.00	1000.00	0.00	11	2104.85	2159.77	54.92
1	1070.00	1072.51	2.51	12	2252.85	2316.37	64.18
2	1144.90	1150.27	5.37	13	2409.85	2448.32	74.47
3	1225.04	1233.68	8.64	14	2578.53	2664.46	85.97
4	1310.80	1323.13	12.33	15	2759.03	2857.65	98.62
5	1402.55	1419.07	16.52	16	2952.16	3064.85	112.69
6	1500.73	1521.96	21.23	17	3158.82	3287.08	128.26
7	1605.78	1632.32	26.54	18	3379.93	3225.42	145.49
8	1718.19	1750.67	32.48	19	3616.53	3781.04	164.51
9	1838.46	1877.61	39.15	20	3869.68	4055.20	185.52
10	1967.15	2013.75	46.60				

4.2. PERBAIKAN METODE EULER dan METODE RUNGE-KATTA

→ Theorema Nilai Rata-rata

Bila suatu fungsi f kontinyu pada interval tertutup $[a, b]$ dan dapat diturunkan pada interval terbuka (a, b), maka paling tidak ada satu titik c pada interval (a, b) sedemikian sehingga

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$$



Batasan Metoda Euler

Pada kasus sebelumnya kita dapatkan nilai turunan pada titik $(0, 1000)$ adalah 70. Kemudian diasumsikan turunan $\frac{dQ}{dt}$ konstant pada interval $[0, 20]$.

Perbaikan Metoda Euler dengan Satu Langkah

Dari perhitungan sebelumnya kita peroleh

$$T - 1000 = 70(t - 0)$$

$$T = Q_0 + m_0.\Delta t \quad \rightarrow Q_0 = 1000 \qquad ;\ \Delta t = t - 0$$

$$m_0 = \frac{dQ}{dt} = 70$$

$$T(20) = 1000 + 70(20) = 2400$$

Kita dapat menggunakan nilai pendekatan dari atas untuk memperkirakan kemiringan (slope) pada $t = 20$, yaitu

$$m_1 = \frac{dQ}{dt}\Big|_{t=0} = 0,07Q(20) = 0,07(2400) = 168$$

Ini berarti kita punya dua nilai kemiringan, yaitu pada awal dan akhir interval.

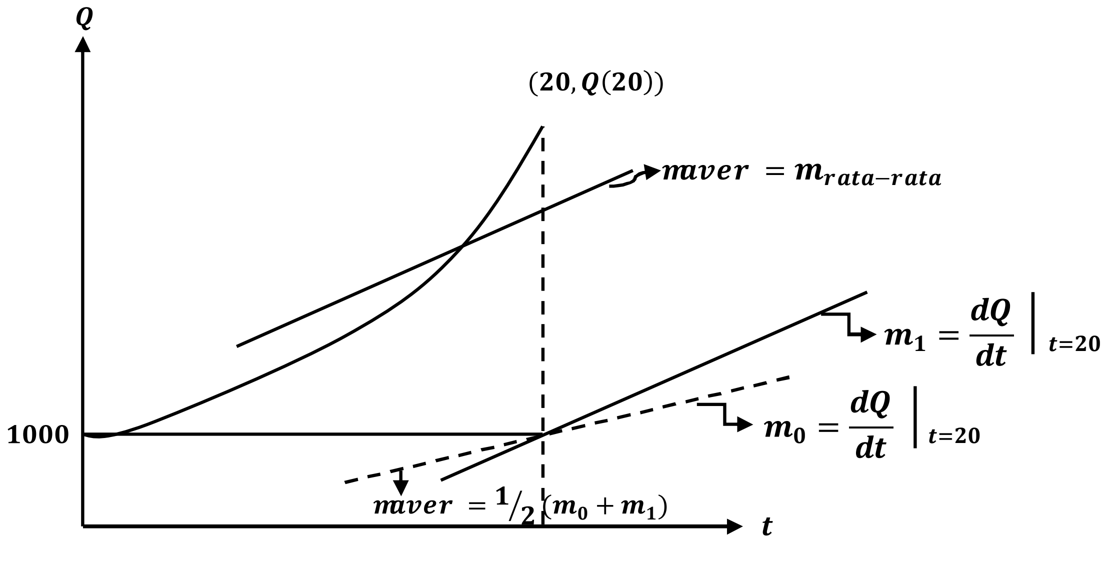
$$m_{rata-rata} = \frac{m_0 + m_1}{2} = \frac{70 + 168}{2} = 119$$

Sehingga untuk pendekatan satu langkah

$$Q_1 = Q_0 + m_{rata-rata}\Delta t$$

$$Q(20) = 1000 + 119(20) = 3380,$$

Bandingkan dengan $Q(20)$ sebelumnya → $Q(20) = 2400$



<u>Perbaikan Metoda Euler dengan Dua Langkah</u>

Bila Δt kita kurangi, $\underline{\Delta t}$ → $\Delta t = \frac{20}{2} = 10$

$$Q(10) \approx Q_1 = Q_0 + m_{rata-rata}\Delta t$$

$$Q(10) = Q_0 + \frac{dQ}{dt}\Big|_{t=0}\Delta t = 1000 + 70(10) = 1700$$

$$m_1 = 0,07(1700) = 119$$

$$m_r = m_{rata-rata} = \frac{m_0 + m_1}{2} = \frac{70 + 119}{2} = 94,5$$

Memperkirakan nilai Q selanjutnya,

$Q(10) \approx Q_1 = Q_0 + m_r \Delta t = 1000 + 94,5(10)$

$= 1945$

Hitung m_r selanjutnya,

$$m_1 = \frac{dQ}{dt} \Big|_{t=0} = 0,07(1945) = 136,15$$

$$Q(20) \approx Q_1 + \frac{dQ}{dt} \Big|_{t=0} \Delta t = 1945 + 136,15(10)$$

$$= 3306,5$$

Pada $t = 20 \quad \rightarrow m_1 = 0,07(3306,50 \quad) = 231,455$

$$m_r = \frac{m_0 + m_1}{2} = \frac{136,15 + 231,455}{2} = 183,803$$

$$Q(20) \approx Q_2 = Q_1 + m_r \Delta t$$

$$= 1945 + 283,803 \ (10) = 3783,03$$

Bandingkan dengan hasil sebelumnya 3380.

<u>Perbaikan Metode Euler dengan n Langkah.</u>

Langkah 1 : ;bagi ingtervel $x_0 \leq x \geq b$ menjadi n subintervals.

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x,$$

.

.

$$\Delta x_n = x_{n-1} + \Delta x = b$$

Langkah 2 : Cari hasil pendekatan dengan urutan :

$$y_1 = y_0 + [g(x_0, y_0) + g(x_1, y_1{}^*)] \frac{\Delta x}{2}$$

$$y_2 = y_1 + [g(x_1, y_1) + g(x_2, y_2{}^*)] \frac{\Delta x}{2}$$

.

.

$$y_n = y_{n-1} + [g(x_{n-1}, y_{n-1}) + g(x_n, y_n{}^*)] \frac{\Delta x}{2}$$

Dimana $y_n{}^* = y_{n-1} + [g(x_{n-1}, y_{n-1})] \Delta x$

t	Improved Euler Q(t)	t	Improved Euler Q(t)
0	1000.00	11	.
1	1072.45	12	.
2	1150.15	13	.
3	1233.48	14	.
4	1322.84	15	.
5	.	16	.
6	.	17	.
7	.	18	.
8	.	19	3777.15
9	.	20	4050.80
10	.		

Runge-Kutta Methods

Metode ini memperkirakan turunan pada berbagai titik dalam interval dan kemudian menghitung turunan rata-rata terbobot (weighthed average derivative).

Metode Runge-kutta diklasifikasikan oleh urutan, urutan tersebut tergantung pada jumlah perkiraan kemiringan yang digunakan pada setiap langkah.

Asumsikan $y' = g(x, y)$

$$y_n = y_{n-1} + aK_1 + bK_2$$

$$K_1 = g(x_{n-1}, y_{n-1})\Delta x$$

$$K_2 = g(x_{n-1}\alpha\Delta x, y_{n-1} + \beta K_1)\Delta x.$$

a, b, α **dan** β **=konstant yang memenuhi batasan**

Berikut $a + b = 1$, $n\alpha = 1/2$ **, dan** $b\beta = 1/2$

Metoda yang paling popular untuk menyelesaikan adalah *fourth-order Runge-Kutta Method.*

K_1 **dan** K_4 **adalah perkiraan tingkat kemiringan yang dihitung pada titik akhir interval** $[x_{n-1}, x_n]$.

K_2 **dan** K_3 **adalah perkiraan tingkat kemiringan yang dihitung pada titik tengah interval.**

Fourth-Order Runge-Kutta Method

Langkah 1. Bagi interval $x_0 \leq x \geq b$ menjadi p subinterval dengan menggunakan titik-titik yang dibagi secara sama.

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x,$$

.

.

$$x_p = x_{p-1} + \Delta x = b$$

Langkah 2. Untuk $n = 1, 2, 3, \ldots p$; cari pendekatan urutan berikut

$$y_n = y_{n-1} + \frac{K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4}{6}$$

Dimana :

$$K_1 = g(x_{n-1}, y_{n-1})\Delta x$$

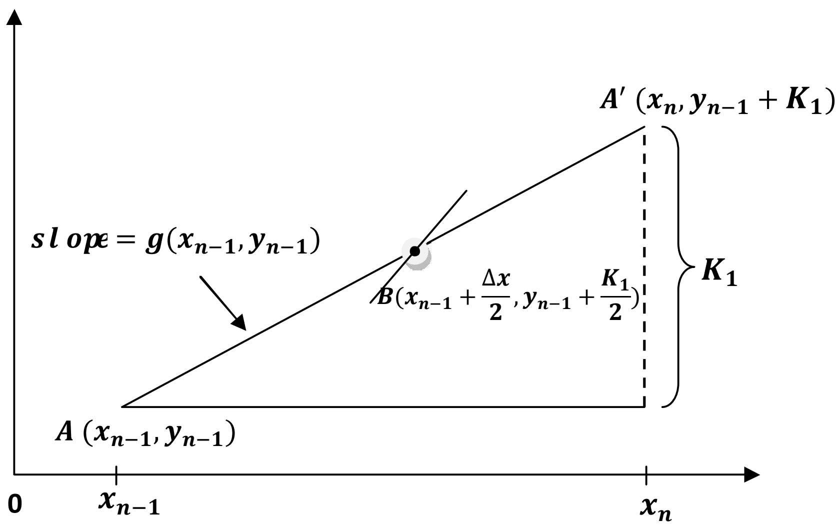
$$K_2 = g(x_{n-1} + \frac{\Delta x}{2}, y_{n-1} + \frac{K_1}{2})\Delta x$$

$$K_3 = g(x_{n-1} + \frac{\Delta x}{2}, y_{n-1} + \frac{K_2}{2})\Delta x$$

$$K_4 = g(x_{n-1} + \frac{\Delta x}{2}, y_{n-1} + \frac{K_3}{2})\Delta x$$

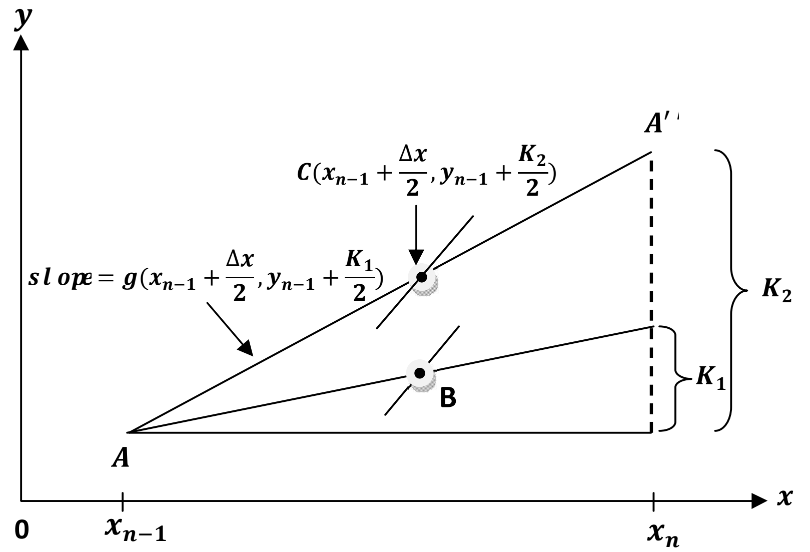
Interpretasi Geometrik Metoda Fourth-Order Runge-Kutta Method

1). Perkiraan Kenaikan Pertama



Bila titik $A\ (x_{n-1}, y_{n-1})$**, kemiringan pada titik A adalah** $g(x_{n-1}, y_{n-1})\ \rightarrow K_1 = g(x_{n-1}, y_{n-1})\Delta x$

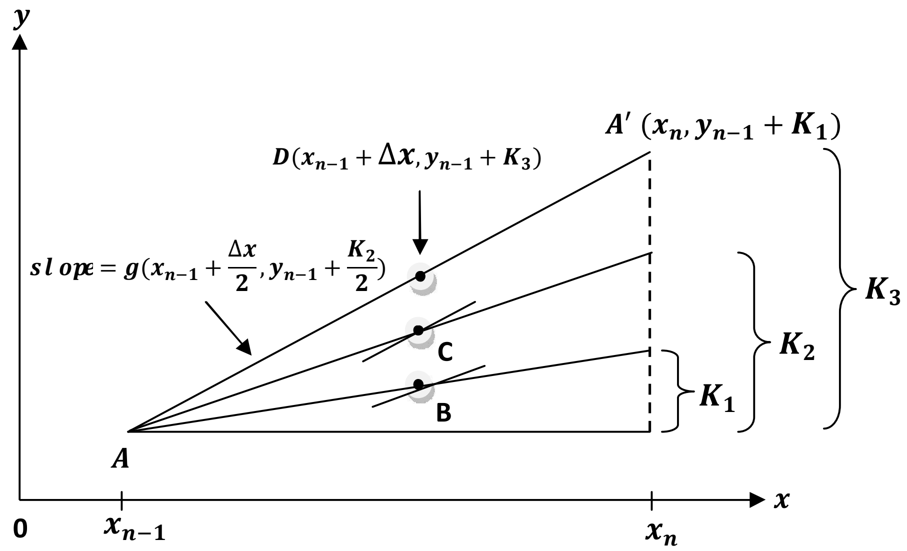
2). Perkiraan Kenaikan Kedua



Titik B adalah titik tengah segmen AA'**. Koordinat pada titik B** $\rightarrow \left(x_{n-1} + \frac{\Delta x}{2}, y_{n-1} + \frac{K_1}{2}\right)$ **, dan kemiringan pada titik B adalah** $g\left(x_{n-1} + \frac{\Delta x}{2}, y_{n-1} + \frac{K_1}{2}\right)$ **,** $\rightarrow$

$$K_2 = \left(x_{n-1} + \frac{\Delta x}{2}, y_{n-1} + \frac{K_1}{2}\right)\Delta x.$$

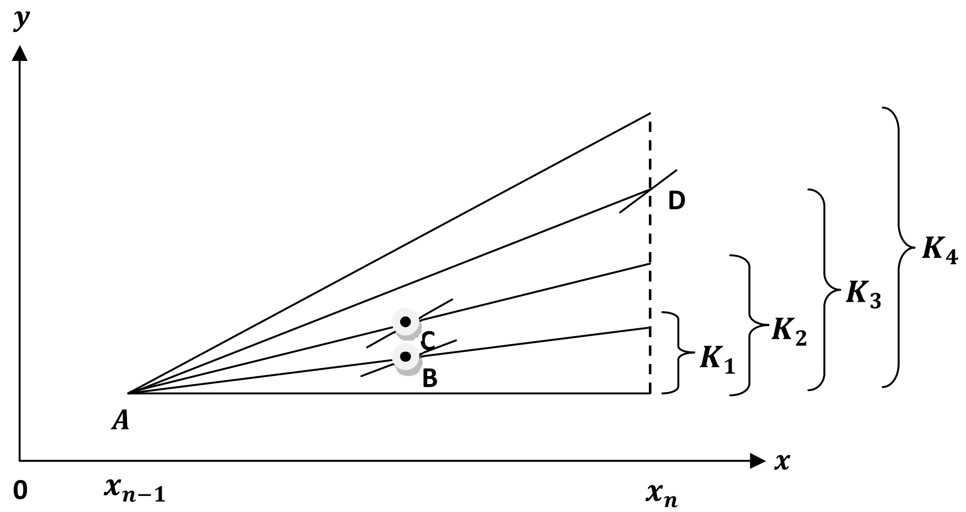
3). Perkiraan Kenaikan Ketiga



Titik tengah C memiliki koordinat $(x_{n-1} + \frac{\Delta x}{2}, y_{n-1} + \frac{K_2}{2})$ **perkiraan kemiringan di C adalah**

$$g(x_{n-1} + \frac{\Delta x}{2}, y_{n-1} + \frac{K_2}{2})\ , K_3 = g\left(x_{n-1} + \frac{\Delta x}{2}, y_{n-1} + \frac{K_2}{2}\right)\ \Delta x.$$

4). Perkiraan Kenaikan Keempat



Pada gambar sebelumnya koordinat D $(x_{n-1} + \Delta x, y_{n-1} + K_3)$

Perkiraan kemiringan dititik $D \rightarrow g\ (x_{n-1} + \Delta x, y_{n-1} + K_3)$

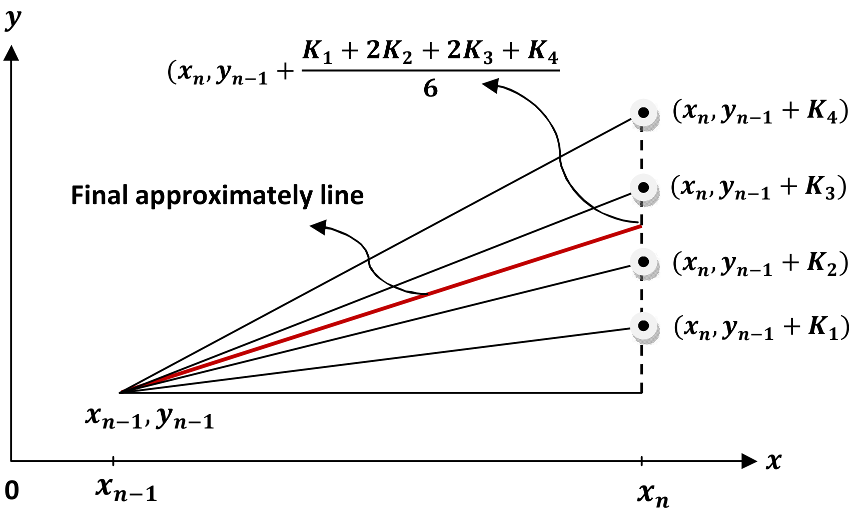
$K_4 = g(x_{n-1} + \Delta x, y_{n-1} + K_3)\Delta x.$

<u>Perkiraan kenaikan terbobot</u>

Kenaikan $= \frac{K_1+2K_2+2K_3+K_4}{6}$

Menghitung Nilai Variabel terikat

$$y_n = y_{n-1} + \frac{K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4}{6}$$



4.3. Penyelesaian Persamaan Diferensial Orde Kedua Secara Numerik

Asumsikan persamaan diferensial orde kedua sebagai

$y'' = g(x, y, y')$

Konsisi awal $y(x_0) = y_0$ dan $y'(x_0) = v_0$

Untuk menyelesaikan , kita perkenalkan variabel baru

$v = y'(x) \ \rightarrow v' = y''$

Maka persamaan differensial orde kedua dapat ditulis sebagai pasangan PD orde 1, yaitu:

$y' = v$

$v' = g(x, y, v)$

Dengan batasan kondisi awal

$y(x_0) = y_{0,}$ **dan** $v(x_0) = v_{0,}$

a. EULER'S Method

$y'' = g(x, y, y'), y(x_0) = y_0, y'(x_0) = v_0$

Langkah 1 : bagi interval $x_0 \leq x \geq b$ menjadi n subinterval dengan pembagian yang sama

$x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, \dots, x_n = x_{n-1} + h = b$

<u>Langkah 2</u> **: cari pendekatan berikut**

$\boldsymbol{y_1 = y_0 + hv_0}$

$\boldsymbol{v_1 \ = v_0 + hg(x_0, y_0, v_0)};$

$\boldsymbol{y_2 = y_1 + hv_1}$

$\boldsymbol{v_2 \ = v_0 + hg(x_1, y_1, v_1)};$

$\vdots$

$\boldsymbol{y_n = y_{n-1} + hv_{n-1}}$

$\boldsymbol{v_n \ = v_{n-1} + hg(x_{n-1}, y_{n-1}, v_{n-1})}$

<u>Contoh:</u>

Selesaikan PD orde kedua berikut dengan Metoda Euler $\boldsymbol{y'' + y' - 2y = 0 \ , y(0) = \frac{3}{2}, y' = 0}$ **interval** $\boldsymbol{0 \le x \le 1}$

<u>Solusi:</u> **pilih ukuran langkah** $\boldsymbol{h = \Delta x = 0,1}$

Tulis PD II → pasangan PD I.

$\boldsymbol{v = y'}$

$\boldsymbol{v' = y'' = 2y - y'}$

Substitusi $\quad \boldsymbol{y' = v}$

$\qquad\qquad\quad \boldsymbol{v' = 2y - y'}$

$$\boldsymbol{y_1 = y_0 + hv_0 = \frac{3}{2} + 0,1(0) = 1,5}$$

$$\boldsymbol{v_1 = v_0 + hg(x_0, y_0, v_0) = v_0 + h(2y_0 - v_0)}$$

$$\boldsymbol{= 0 + 0,1\left(2.\tfrac{3}{2} - 0\right) \ = 0,3}$$

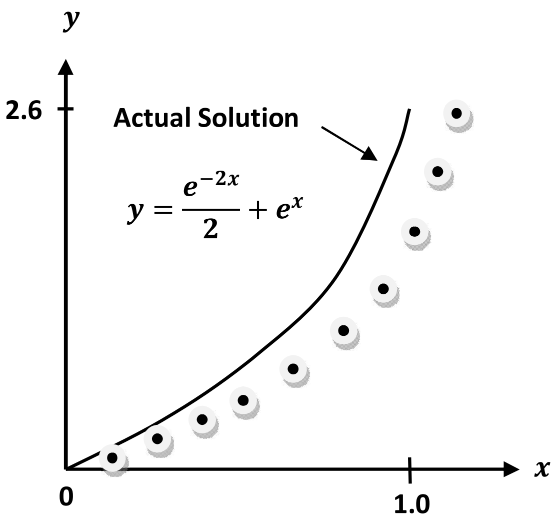
$$\boldsymbol{y_2 = y_1 + hv_1 = 1,5 + 0,1\ (0,3) = 1,53}$$

$$\boldsymbol{v_2 = v_1 + hg(x_1, y_1, v_1) = v_1 + h(2y_1 - v_1)}$$

$$\boldsymbol{= 0,3 + 0,1\left(2.\ \tfrac{3}{2} - 0,3\right) \ = 0,57}$$

x	Euler y(x)	Actual y(x)	Euler v=y'(x)	Actual y'(x)
0.0	1.500	1.500	0.000	0.000
0.1	1.500	1.515	0.300	0.286
0.2	1.530	1.557	0.570	0.551
0.3	1.587	1.624	0.819	0.801
0.4	1.669	1.716	1.055	1.042
0.5	1.774	1.833	1.283	1.281
0.6	1.903	1.973	1.509	1.521
0.7	2.054	2.137	1.739	1.767
0.8	2.227	2.326	1.976	2.024
0.9	2.425	2.524	2.224	2.294
1.0	2.647	2.786	2.486	2.583

Bila tabel tersebut dibandingkan dengan nilai actual $y = \frac{e^{-2x}}{2} + e^{x}$; diperoleh hasil gambar berikut :



<u>b. Improved Eulers Method</u>

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(v_k + v_{k+1})$$

$$v_{k+1} = v_k + \frac{h}{2}[g(x_k, y_k, v_k) + g(x_{k+1}, y_{k+1}, v_{k+1})]$$

Karena persamaan diatas ada y_{k+1} dan v_{k+1} ; maka pertama kali kita perkirakan nilai tersebut dengan Metoda Euler , sbb :

$$v^{*}_{k+1} = v_k + hg(x_k, y_k, v_k)$$

$$y^*_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[v_k + v^*_{k+1}]$$

Kemudian kita perbaiki nilai ini dengan rumusan berikut:

$$v_{k+1} = v_k + \frac{h}{2}[g(x_k, y_k, v_k) + g(x_{k+1}, y^*_{k+1}, v^*_{k+1})]$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[v_k + v_{k+1}]$$

C. Fourth-Orde Runge Kutta Method.

Langkah 1 : bagi interval $x_0 \leq x \leq b$ menjadi n subinterval dengan pembagian yang sama.

$$x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, \dots \dots, x_n = x_{n-1} + h = b$$

Langkah 2 : masukkan $y' = v$;hitung kemiringan berikut :

$$M_1 = V_k$$

$$L_1 = g(x_k, y_k, v_k)$$

$$M_2 = V_k + \frac{hL_1}{2}$$

$$L_2 = g\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{hM_1}{2}, v_k + \frac{hL_1}{2}\right)$$

$$M_3 = V_k + \frac{hL_2}{2}$$

$$L_3 = g\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{hM_2}{2}, v_k + \frac{hL_2}{2}\right)$$

$$M_4 = V_k + hL_3$$

$$L_4 = g(x_k + h, y_k + hM_3, v_k + hL_3)$$

Langkah 3 ; hitung

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}[M_1 + 2M_2 + 2M_3 + M_4]$$

$$v_{k+1} = v_k + \frac{h}{6}[L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4]$$

Langkah 4. Ulangi langkah 2 dan 3 untuk $k = 0, 1, 2, \ldots \ldots, n-1$

Contoh :

Dengan menggunakan fourth order Runge-Kutta Method, selesaikan masalah nilai awal PD II. Sbb :

$$y'' + y' - 2y = 0\,, \quad y(0) = \frac{3}{2}\,, \qquad y'(0) = 0$$

Solusi :

Langkah 1. Pilih ukuran langkah (interval), $h = 0,1$ dan gunakan persamaan

$$y' = v\,, \quad \rightarrow v' = 2y - v$$

Langkah 2.

$$M_1 = V_0 = 0$$

$$L_1 = 2y(0) - V_0 = 2.\tfrac{3}{2} - 0 = 3$$

$$M_2 = V_0 + \tfrac{hL_1}{2} = 0 + \tfrac{0,1.3}{2} = 0,15$$

$$L_2 = 2\left(y_0 + \tfrac{h\,M_1}{2}\right) - \left(V_0 + \tfrac{hL_1}{2}\right) = 2\left(\tfrac{3}{2}\right) - \tfrac{0,1.3}{2} = 2,85$$

$$M_3 = V_0 + \tfrac{hL_2}{2} = 0 + \tfrac{0,1.2,85}{2} = 0,1425$$

$$L_3 = 2\left(y_0 + \frac{h\,M_2}{2}\right) - \left(V_0 + \frac{hL_2}{2}\right)$$

$$= 2\left(\frac{3}{2} + \frac{0,1.0,1425}{2}\right) - \left(0 + \frac{0,1.2,85}{2}\right) = 2,8625$$

$$M_4 = V_0 + hL_3 = 0 + 0,1.2,8625 = 0,28625$$

$$L_4 = 2(y_0 + h\,M_3) - (V_0 + hL_3)$$

$$= 2\left(\frac{3}{2} + 0,01425\right) - (0 + 0,28625) = 2,74225$$

Langkah 3.

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}[M_1 + 2M_2 + 2M_3 + M_4] = 1,5 + \frac{0,087125}{6} = 1,51452$$

$$v_1 = v_0 + \frac{h}{6}[L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4] = 0 + \frac{1,716725}{6} = 0,28612$$

Langkah 4. Lanjutkan untuk $k = 1$, ulangi step 2

- **Step 2**

$$M_1 = V_1 = 0,28612$$
$$L_1 = 2y_1 - V_1 = 2(1,51452\ ) - 0,28612 = 2,74292$$
$$M_2 = V_1 + \frac{hL_1}{2} = 0,423266$$
$$L_2 = 2\left(y_1 + \frac{h\,M_1}{2}\right) - \left(V_1 + \frac{hL_1}{2}\right) = 2,634386$$
$$M_3 = V_1 + \frac{hL_2}{2} = 0,4178393$$
$$L_3 = 2\left(y_1 + \frac{h\,M_2}{2}\right) - \left(V_1 + \frac{hL_2}{2}\right) = 2,6535273$$
$$M_4 = V_1 + hL_3 = 0,55147$$
$$L_4 = 2(y_1 + h\,M_3) - (V_1 + hL_3) = 2,56113$$

- **Step 3**

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{6}[M_1 + 2M_2 + 2M_3 + M_4] = 1,5565$$
$$v_2 = v_1 + \frac{h}{6}[L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4] = 0,55078$$

Bila dilanjutkan dan dibandingkan dengan nilai actual $y = \frac{e^{-2x}}{2} + e^x$; diperoleh hasil sbb :

Tabel perkiraan $y'' + y' - 2y = 0$; $y(0) = 1,5$, $y'(0) = 0$

x	Euler y(x)	Actual y(x)	Euler v=y'(x)	Actual y'(x)
0.0	1.500	1.500	0.000	0.000
0.1	1.515	1.515	0.286	0.286
0.2	1.557	1.557	0.551	0.551
0.3	1.624	1.624	0.801	0.801
0.4	1.716	1.716	1.042	1.042
0.5	1.833	1.833	1.281	1.281
0.6	1.973	1.973	1.521	1.521
0.7	2.137	2.137	1.767	1.767
0.8	2.326	2.326	2.094	2.094
0.9	2.542	2.542	2.294	2.294
1.0	2.786	2.786	2.583	2.583