BAB VI

PENYELESAIAN DERET UNTUK PERSAMAAN DIFERENSIAL

Bila persamaan diferensial linear homogen memiliki koefisien constant, maka persamaan tersebut dapat diselesaikan dengan metoda aljabar (seperti yang telah dijelaskan sebelumnya. Namun, bila persamaan tersebut harus diselesaikan dengan metoda yang lain.

1. METODA DERET POWER (Power Series Method) / PANGKAT

Metode deret power merupakan metoda dasar standar untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear dengan koefisien yang berubah (variable coefficient).

DERET POWER/PANGKAT

Bentuk persamaan deret power adalah :

$$\sum_{m=0}^{\sim} a_m(x-x_0)^m = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^3 + \cdots$$

$a_0, a_1, \ldots$ **disebut koefisien deret.**

$x_0 =$ **konstant, pusat deret**

$x =$ **suatu variabel**

Bila $x_0 = 0$ **,** $\rightarrow$ **dinamakan deret power dalam power** x **(Power Series Method of** x**)**

$$\sum_{m=0}^{\sim} a_m(x)^m = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \ldots$$

Contoh yang terkenal dalam hal ini adalah deret Maclaurin, yaitu :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\sim} x^m = 1 + x + x^2 + \cdots \qquad (|x| < 1)$$

$$e^x = \sum_{m=0}^{\sim} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\boldsymbol{c\ o\ s\ \ x = \sum_{m=0}^{\sim} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} = 1\ - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4\,!} - \cdots}$$

$$\boldsymbol{s\ i\ n\, x = \sum_{m=0}^{\sim} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5} - \cdots}$$

<u>IDE dari Metode deret pangkat</u>

Bila diberikan persamaan diferensial berikut :

$$\boldsymbol{y'' + p(x)y' + g(x)y = 0}$$

Pertama, nyatakan $p(x)$ dan $g(x)$ dengan deret pangkat x. Kemudian kita asumsikan suatu penyelesaian dalam bentuk deret pangkat dengan koefisien yang tidak diketahui.

$$\boldsymbol{y = \sum_{m=0}^{\sim} a_m x^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ldots}$$

Substitusi deret tersebut dan diferensialnya,

$$\boldsymbol{y' = \sum_{m=1}^{\sim} m a_m x^{m-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots}$$

$$\boldsymbol{y'' = \sum_{m=2}^{\sim} m(m-1) a_m x^{m-2} = 2a_2 + 6a_3 x + \cdots}$$

Contoh :

$$\boldsymbol{y' - y = 0}$$

Solusi : Memasukkan persamaan diatas

$$\boldsymbol{(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots) - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ldots) = 0}$$

$$\boldsymbol{(a_1 - a_0) + (2a_2 - a_1)x + (3a_3 - a_2)x^2 + \cdots = 0}$$

Samakan koefisien diatas sama dengan nol

$$\boldsymbol{a_1 - a_0 = 0\,, 2a_2 - a_1 = 0\,, 3a_3 - a_2 = 0}$$

Selesaikan persamaan tersebut dalam bentuk a_0

$$\boldsymbol{a_1 = a_0\,, a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2!}\,, a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{3!}\,, \ldots}$$

$$y = a_0 + a_0 x + \frac{a_0}{2!}x^2 + \frac{a_0}{3!}x^3 + \cdots$$

$$\left\| y = a_0\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) = a_0 e^x \right\|$$

Contoh : selesaikan $y' = 2xy$

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = 2x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ldots)$$

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + 6a_6 x^5 + \cdots$$
$$= 2a_0 x + 2a_1 x^2 + 2a_2 x^3 + 2a_3 x^4 + 2a_4 x^5 + \cdots$$

$$a_1 = 0, 2a_2 = 2a_0, \; 3a_3 = 2a_1, 4a_4 = 2a_2, 5a_5 = 2a_3$$

Maka $a_3 = 0$, $a_5 = 0$

$$a_2 = a_0 \; , \; a_4 = \frac{a_2}{2} = \frac{a_0}{2!} \; , \qquad a_6 = \frac{a_4}{3} = \frac{a_6}{3!} \ldots$$

$$\left\| y = a_0\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \cdots\right) = a_0 e^{x^2} \right\|$$

Contoh :

$$y'' + y = 0$$

$$(2a_2 + 3.\;2a_3 x + 4.3a_4 x^2 + \cdots) + (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ldots)$$
$$= (2a_2 + a_0) + (\,3.2a_3 + a_1)x + (\,4.3a_4 + 2a_2)x^2 + \cdots = 0$$

$2a_2 + a_0 = 0$ → **coef. of** x^0

$3.2a_3 + 2a_1 = 0$ → **coef. of** x^1

$4.3a_4 + 2a_2 = 0$ → **coef. of** x^2

$$a_2 = -\frac{a_0}{2!}, \; a_3 = -\frac{a_1}{3!} \; , \; a_4 = -\frac{a_2}{4.3} = \frac{a_0}{4!}$$

a_0 **dan** a_1 **adalah sembarang.**

Maka :

$$y = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!}x^2 - \frac{a_1}{3!}x^3 + \frac{a_0}{4!}x^4 + \frac{a_1}{5}x^5 + \cdots$$

$$y = a_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \quad + \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5} - \cdots\right)$$

Dari persamaan Maclaurin didapat :

$$y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$$

2. REDUKSI TINGKAT (Reduction of order)

Terkadang solusi $y = y_1(x)$ diketahui untuk suatu persamaan linear tingkat dua homogen.

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

Contoh : bila $y_1 = x^2$ adalah solusi persamaan homogen.

$x^2y'' - 2y = 0$. Maka kita mungkin dapat membuat solusi $y_2(x)$. Prosedur ini disebut penurunan tingkat (Reduction of order).

Contoh : bila $y_1 = x^2$ adalah solusi $x^2y'' - 2y = 0$, $y_2(x)$ untuk $0 < x < \sim$

Solusi : $y_2 = u(x)x^2$

$$y_2' = u'x^2 + 2ux \quad , \quad y_2'' = u''x^2 + 4u'x + 2u$$

Substitusi ke persamaan diatas $(x^2y'' - 2y = 0)$

$$x^4u'' + 4x^3u' + 2x^2u - 2x^2u = 0$$

Bila dimisalkan $w = u'$, $w' = u''$.

Maka persamaan terakhir ini menjadi persamaan tingkat (orde) satu dalam variabel yang baru w dan w'

$$x^4w' + 4x^3w = 0$$

$$w' + \frac{4}{x}w = 0$$

Dengan menggunakan pemisahan variabel dan integral diperoleh :

$$\ln w = -4 \ln x \to w = x^{-4}$$

$$u = \int w\,dx = \int x^{-4}\,dx = -\frac{1}{3}x^{-3}$$

Substitusi u ke dalam bentuk y_2 :

$$y_2 = ux^2 = -\frac{1}{3}x^{-1}$$

Maka solusi umumnya adalah

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

$$\|y = C_1 x^2 + C_2 x^{-1}\|$$

C angka $-\frac{1}{3}$ telah diserap dalam nilai konstan C_2.

<u>KASUS UMUM</u>

Tahapan pengerjaan solusi kedua dari solusi yang telah diketahui

<u>Langkah 1</u> : Diberikan bahwa $y_1(x)$ diketahui dari :

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$y_1(x) \neq 0$ dan $a_2(x) \neq 0$ tulis solusi dari $y_2(x) = u(x)y_1(x) \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

<u>Langkah 2</u> : Substitusi y_2 dan turunannya y_2', y_2'' ke pers (7)

<u>Langkah 3</u> : Substitusi $w = u'$ dan $w' = u''$ ke persamaan yang di dapat dari langkah 2. Selesaikan persamaan dengan pemisahan variabel.

<u>Langkah 4</u> : Integrasikan fungsi w

$$u(x) = \int w(x)dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . (3)$$

<u>Langkah 5</u> : Substitusi fungsi $u(x)$ dari persamaan (3) ke pers (8) dan tulis solusi umum.

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Contoh :

Fungsi $y_1 = e^x$ merupakan solusi dari

$xy'' - (x+1)y' + y = 0$ pada interval $0 < x < \sim$. Tentukan solusi umum

Solusi :

$$y_2 = e^x \quad \rightarrow \quad y_2' = (u' + u)e$$

$$y_2'' = (u'' + 2u' + u)e$$

Substitusi ke persamaan PD orde (2)

$$x(u''+2u'+u)e^x - (x+1)(u'+u)e^x + ue^x = 0$$

$$xe^x u'' - (x+1)e^x u' = 0$$

Substitusi $w = u'$ **dan** $w' = u''$**; menghasilkan** $w' + \left(1 - \frac{1}{x}\right) w = 0$

Karena $e^x \neq 0$ **dan** > 0 **. Solusi persamaan diatas menjadi**

$$\ln w = \ln x - x$$

Dengan penerapan eksponensial pada kedua sisi menghasilkan : $w = xe^{-x}$

Integralkan :

$$u = \int w\,dx$$

$$u = \int xe^{-x}\,dx = -(x+1)e^{-x}$$

Substitusi fungsi $u(x)$

$$y_2 = ue^x = uy_1 = -(x+1)e^{-x}, \qquad e^{-x} = -(x+1)$$

Maka solusi umum :

$$\therefore\ y = C_1 e^x + C_2(x+1)$$

3. Persamaan Euler

Tipe yang paling sederhana dari persamaan diff. orde 2 linear dengan koefisien yang berubah adalah persamaan Euler (disebut juga dengan Euler-Cauchy atau persamaan equidimensional).

Bentuk persamaan ini adalah :

$$x^2y'' + axy' + by = 0 \ , \ x \neq 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

a,b, constant. Pangkat dari x **sesuai dengan tingkat/orde turunan.**

<u>A. Penyelesaian Untuk x positif</u>

Persamaan (1) menyatakan bahwa beberapa fungsi y **dan turunannya, bila dikalikan dengan pangkat tertentu dari** x **akan menghasilkan nol.**

Bila kita asumsikan bahwa fungsi penyelesaian adalah pangkat dari ; maka :

$$y = x^r \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

Dan diturunan

$$y' = rx^{r-1}$$

$$y'' = r(r-1)x^{r-2}$$

Substitusi y dan turunannya ke pers (1)

$$x^2 r(r-1)x^{r-2} + axrx^{r-1} + bx^r = 0 \ , \ x \neq 0$$

$$r(r-1)x^r + arx^r + bx^r = 0$$

$$r(r-1) + ar + b = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

Maka fungsi pangkat $y = x^r$ menyelesaikan persamaan Euler (1) jika dan hanya jika r adalah akar kuadrat dari pers (3).

Kasus 1 : Akar riil dan tertentu.

Dalam kasus ini r_1 dan r_2 $(r_1 \neq r_2)$ adalah akar pers (3) dan menghasilkan $y_1 = x^{r_1}$ dan $y_2 = x^{r_2}$

y_1 dan y_2 adalah bebas linear ; dari Wronskian test.

$$w[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} x^{r_1} & x^{r_2} \\ r_1 x^{r_1-1} & r_2 x^{r_2-1} \end{vmatrix}$$

$$= (r_2 - r_1)x^{r_1+r_2-1} \neq 0$$

Maka solusi umum dari persamaan Euler dalam kasus ini adalah : $y = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}$

Contoh :

Tentukan solusi umum untuk

$$x^2 y'' - xy' - 3y = 0 \ , \ x > 0$$

Solusi :

Substitusi $y = x^r$ ke persamaan diferensial

$$r(r-1) - r - 3 = 0$$

$$r^2 - 2r - 3 = 0 \quad \rightarrow r_1 = -1 \text{ dan } r_1 = 3$$

Maka solusi umum adalah :

$\therefore\ y = C_1 x^{-1} + C_2 x^3$

Kasus 2 :

Akarnya adalah gabungan riil dan kompleks $r_1 = \alpha + \beta_i$ **dan** $r_2 = \alpha - \beta_i$

Penyelesaiannya adalah

$x^{\alpha+\beta i} = x^{\alpha} x^{\beta i}$ **dan** $x^{\alpha+\beta i} = x^{\alpha} x^{-\beta i}$ ………………………………… (5)

Karena $x = e^{\ln x}$ **dan** $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ **(dari Euler's identity)**

Dengan substitusi ke pers (5); kita dapatkan $x^{\beta i} = e^{i(\beta \ln x)} = \cos(\beta \ln x) + i\sin(\beta \ln x)$

Maka solusi pers (5) adalah

$y_1 = x^{\alpha}\cos(\beta \ln x)$ **dan** $y_2 = x^{\alpha}\sin(\beta \ln x)$

Sehingga penyelesaian umum dalam kasus ini :

$\|y = x^{\alpha}[C_1\cos(\beta \ln x) + C_2\sin(\beta \ln x)]\|$

Contoh : Tentukan solusi umum dari
$x^2y'' - 3xy' + 5y = 0\ ,\ x > 0$

Solusi : substitusi $y = x^r$ **ke persamaan diff.**

$r(r-1) - 3r + 5 = 0$ **atau** $r^2 - 4r + 5 = 0$

Akar-akarnya adalah : $r = 2 \pm i$, **maka solusi umum :**

$\|y = x^2[C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x)]\|$

Kasus 3 : Akar-akar berulang/sama

Dengan asumsi r **adalah akar kuadrat yang sama dari pers (3)**

$r^2 + (a-1)r + b = 0$

$r = -\dfrac{a-1}{2} \rightarrow 2r + a = 1$ ……………………………(7)

Pada kasus ini akar r yang berulang memberikan solusi

$y_1 = x^r$

Dengan menggunakan metoda reduksi tingkat (orde) kita dapatkan

$y_2 = u(x)x^r$ ………………………………………………………………(8)

$y_2' = u'x^r + rux^{r-1} \rightarrow y_2'' = u''x^r + 2ru'x^{r-1} + r(r-1)ux^{r-2}$

Substitusi y_2 dan turunannya ke persamaan Euler (1)

$$x^{r+2}u'' + (2r+a)x^{r+1}u' + \underbrace{[r(r-1)+ar+b]}_{=0}x^r u = 0$$

Karena r adalah akar kuadratik persamaan (3), maka bagian $r(r-1) + ar + b = 0$

Selanjutnya $xu'' + (2r+a)u' = 0$ …………………………………….. (9)

Substitusi persamaan (7) ke (9) menghasilkan

$xu'' + u' = 0$ ………………………………………………………………(10)

Substitusi $w = u'$ dan $w' = u''$; diperoleh

$\frac{w'}{w} = -\frac{1}{x} \rightarrow \ln w = -\ln x$ atau $w = x^{-1}$

Kemudian $u = \int w dx = \ln x$ ………………………………………………. (11)

Setelah substitusi (11) ke (8) diperoleh

$y_2 = ux^r = x^r \ln x$

Maka solusi umum dalam kasus ini adalah

$\|y = x^r(C_1 + C_2 \ln x)\|$

Contoh : Tentukan solusi umum dari

$4x^2y'' + 16xy' + 9y = 0, \quad x > 0$

Solusi : substitusi $y = x^r$ ke persamaan differensial

$4r(r-1) + 16xy' + 9y = 0$

$4r^2 + 12r + 9 = 0 \quad \rightarrow (2r+3)^2 = 0$

Menghasilkan akar yang sama

$r = -{}^{3}/_{2}\ , -{}^{3}/_{2}$ **; maka solusi umum :**

$$\left\| y = x^{-3/2}(C_1 + C_2 \ln x) \right\|$$

B. PENYELESAIAN untuk x Negatif.

Asumsikan $z = -x\ ;\ z > 0$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dz} = -\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{d}{dz}\left(-\frac{dy}{dx}\right) = \int \frac{d}{dz}\left(-\frac{dy}{dx}\right).\frac{dy}{dz}$$

$$= -\frac{d^2y}{dx^2}(-1) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$(-z)^2\frac{d^2y}{dz^2} + a(-z)\left(-\frac{dy}{dz}\right) + by = 0$$

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2} + az\frac{dy}{dz} + by = 0$$

Set $y = z^r = |x|^r$

<u>Maka solusi akhir</u>

- **Bila akar riil dan tertentu**
  $y = C_1|x|^{r_1} + C_2|x|^{r_2}$
- **Bila akar kompleks** $r = \alpha + \beta_i$
  $y = |x|^{\alpha}[C_1 \cos(\beta \ln x) + C_2 \sin(\beta \ln x)]$
- **Bila akar berulang**
- $y = |x|^r(C_1 + C_2 \ln|x|)$