BAB VII

MATRIKS DAN SISTEM LINEAR TINGKAT SATU

Sistem persamaan linear orde/ tingkat satu memiliki bentuk standard :

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .\,(1)$$

Diasumsikan koefisien $a_{ij}(t)$ dan fungsi $f_1(t)$adalah menerus pada interval tertentu I. dalam kasus Matriks persamaan diatas dapat dinyatakan :

$$X'(t) = A(t)X(t) + F(t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .\,(2)$$

Dimana :

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad X'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_n(t) \end{bmatrix}$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

Bila kondisi awal $x_1(t_0) = x_{10}$, $x_2(t_0) = x_{20}$, ... $x_n(t_0) = x_{n0}$, hasil masalah nilai awal dapat dinyatakan sbb :

$$X' = AX + F$$

Dengan batasan kondisi awal

$$x(t_0) = x_0\,, \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{bmatrix}$$

Contoh : Tulis persamaan diff. orde ke-4 menjadi system pers. Linear tingkat Satu

$2y^{(4)} - 3y''' + 2y' - y = 2e^{-t}$

Solusi : $y^{(4)} = \frac{1}{2}y - y' + \frac{1}{2}y'' + \frac{3}{2}y''' + e^{-t}$

Masukkan variabel baru $x_1 = y$, $x_2 = y'$, $x_3 = y''$, $x_4 = y'''$

Substitusi ke persamaan diatas

$x_1' = y' = x_2$

$x_2' = y'' = x_3$

$x_3' = y''' = x_4$

$$x_4' = y^{(4)} = \frac{1}{2}x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 + e^{-t}$$

Contoh : Fungsi Vektor $x = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^t - e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix}$

Adalah solusi dari sistem 3x3 :

$$x' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

Untuk mengecek hasil ini , diturunkan setiap komponen x

$\frac{dx_1}{dt} = \frac{d(e^{3t})}{dt} = 3e^{3t}$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{d(e^t - e^{3t})}{dt} = e^t - 3e^{3t}$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{d(-e^{3t})}{dt} = -3e^{3t}$$

Tentukan komponen dari perkalian AX :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^t - e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^{3t} - e^{2t} \\ -2e^{3t} + e^t - e^{3t} \\ -2e^{3t} - e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ e^t - 3e^{3t} \\ -3e^{3t} \end{pmatrix}$$

Keujudan dan Kemurnian Penyelesaian

Theorema :

Bila komponen Matriks $A(t)$ dan vektor kolom $F(t)$ adalah fungsi menerus pada interval I: $a \leq t \leq b$ yang terdapat t_0 ; maka terdapat solusi unik $x(t)$ pada masalah nilai awal

$$X' = AX + F$$

Dengan $x(t_0) = x_0$

Sistem Linear Homogen

Bila $x_1(t), x_2(t), \dots x_4(t)$ adalah fungsi vector pada interval I. Fungsi tersebut adalah bebas linear pada interval I bila terdapat konstanta $C_1, C_2, C_3, \dots . C_k$, tidak sama dengan nol, sedemikian sehingga

$C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + \cdots + C_kx_k(t) = 0$ **, untuk setiap t pada interval I.**

Bila fungsi tersebut adalah bebas linear → hasil penjumlahan juga bebas linear.

- **Wronskian Test untuk bebas linear.**
  Bila n fungsi vector

$$x_t(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{bmatrix}, x_2(t) = \begin{bmatrix} x_{12}(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n2}(t) \end{bmatrix}, x_n(t) = \begin{bmatrix} x_{1n}(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

Adalah solusi sistem $x' = AX$; maka

$$W[x_1, x_2, \dots, x_n] = det \begin{bmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

Contoh :

Fungsi vector $x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ -2e^{2t} \\ -2e^{2t} \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \\ -e^{3t} \end{bmatrix}$

Menyelesaikan sistem $x' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$

Solusi : misalkan ambil x_2

$$x_1 = e^{2t}$$

$$x_2 = -2e^{2t}$$

$$x_3 = -2e^{2t}$$

$$x_1{}' = 2e^{2t} = 4x_1 + x_3$$

$$x_2{}' = -4e^{2t} = -2x_1 + x_3$$

$$x_3{}' = -4e^{2t} = -2x_1 + x_3$$

Kemudian , $x_2{}' = Ax_2$

$$w[x_1, x_2, x_3] = det\begin{bmatrix} 0 & e^{2t} & e^{3t} \\ e^t & -2e^{2t} & -e^{3t} \\ 0 & -2e^{2t} & -e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$= -e^t\left(-e^{3t} + 2e^{5t}\right) = -e^{6t} \neq 0$$

Oleh karena itu (x_1, x_2, x_3) adalah solusi dasar penyelesaian. Sehingga solusi umumnya adalah

$$x = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3$$

$$= C_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^t + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}e^{2t} + C_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{3t}$$

MATRIKS DASAR

Anggap vector $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ adalah solusi dasar system homogen. Matriks ∅ yang kolomnya dibentuk dari vector x_t disebut matriks dasar dari system $x' = Ax$

$$\emptyset = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & \dots & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & \cdots & x_{m}(t) \end{bmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (*)$$

Solusi umum pada system homogeny dapat dinyatakan dalam bentuk matriks dasar ∅ . solusi umumnya adalah

$$x = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots\dots\dots\dots\dots + C_nx_n$$

$$= C_1\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} x_{12} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + C_n\begin{bmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{m} \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu :

$$x = \emptyset e \quad \text{, dimana } C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}$$

$\emptyset$ adalah matriks dasar.

SIFAT MATRIKS DASAR

1. Kolom matriks $\emptyset$ adalah bebas linear.

2. Determinan $\emptyset$ adalah Wronskian dari kolomnya :

Det $\emptyset = w[x_1, x_2, \dots\dots\dots, x_n]$

3. Solusi umum x memenuhi hubungan

$$x = \emptyset e$$

4. Bila kondisi awal diberikan, maka :

$x_0 = \emptyset(t_0)e$ **; oleh karena itu**

$e = \emptyset^{-1}(t_0)x_0$

5. Dari $x' = Ax$ **dan** $x' = \emptyset' e$ **, maka** $Ax = \emptyset' e$ $\rightarrow$ **substitusi** $x = \emptyset e$ $\rightarrow A\emptyset e = \emptyset' e$

Karena e sembarang $\emptyset' = A\emptyset$

Contoh :

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ -2e^{2t} \\ -2e^{2t} \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \\ -e^{3t} \end{bmatrix}$$

Adalah solusi bebas linier pada sistem : $x' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$

Karena itu matriks dasar adalah

$$\emptyset(t) = \begin{bmatrix} 0 & e^{2t} & e^{3t} \\ e^t & -2e^{2t} & -e^{3t} \\ 0 & -2e^{2t} & -e^{3t} \end{bmatrix}$$

Sebagaimana sebelumnya, det $\emptyset = -e^{6t} \neq 0$**. Invesnya :**

$$\emptyset'(t) = \begin{bmatrix} 0 & e^{-6} & -e^{-t} \\ -e^{-2t} & 0 & -e^{-2t} \\ 2e^{-3t} & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$\emptyset\emptyset' = \emptyset'\emptyset = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kondisi awal $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Solusi unik → yang memenuhi kondisi awal $x = \emptyset e$

$$e = \emptyset'(0)x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = 1\begin{bmatrix} 0 \\ e^{t} \\ 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} e^{2t} \\ -2e^{2t} \\ -2e^{2t} \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \\ -e^{3t} \end{bmatrix}$$

$x_1 = e^{2t}$, $x_2 = e^{t} - e^{3t}$, $x_3 = -e^{3t}$

<u>SISTEM NON HOMOGEN</u>

Bila x_p merupakan solusi tertentu dari system nonhomogen $x' = Ax + F$. dan bila x_e merupakan solusi umum pada interval yang sama dari sistem homogen yang bersesuaian $x' = Ax$.

Maka :

Solusi umum dari system non homogeny pada interval tersebut adalah

$x = x_e + x_p$

$x_e =$ **solusi pelengkap dari system nonhomogen**

$x' = Ax + F(t)$ … … … … … … … … … … … … … … … … … … (1)

Dalam notasi matriks,

$x(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$, $F(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Fungsi komponen $f(t)$dan $g(t)$dalam F diasumsikan menerus sepanjang interval I. a, b, c dan d = constant.

x_p adalah vector penyelesaian yang memenuhi system.

Untuk menyelesaikan x_e , kita dapatkan dua solusi bebas linear terhadap system homogeny

$x' = Ax$

Dua solusi bebas linear dinyatakan dengan

$x_1 = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix}$ **dan** $x_2 = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$

Kemudian bentuk matriks dasar

$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix}$

Dalam istilah Φ, solusi umum system homogen dapat ditulis sbb :

$x_e = C_1 x_1 + C_2 x_2 = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ **atau** $x_e = \Phi e$ **, dimana** $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ **adalah vector constant.**

Bila kita rubah parameter C_1 dan C_2 menjadi fungsi $u_1(t)$dan $u_2(t)$. Maka solusi kita bentuk menjadi :

$$x_p = u_1(t)x_1 + u_2(t)x_2$$

Atau ekuivalen dengan $x_p = \Phi u$

Yang merupakan penyelesaian nonhomogen.

Selanjutnya menentukan fungsi yang belum diketahui $u_1$dan u_2; dengan menggunakan aturan perkalian

$$x_p' = u_1 x_1' + u_1' x_1 + u_2 x_2' + u_2' x_2$$

$$= \begin{pmatrix} x_1' & x_2' \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix}$$

Atau

$$x_p' = \Phi' u + \Phi u'$$

Dengan substitusi ke pers (1) menghasilkan :

$\Phi' u + \Phi u' = A\Phi u + F$

$\Phi' = A\Phi$

$A\Phi u + \Phi u\ ' = A\Phi u + F$ **atau** $\Phi u' = F$

$u' = \Phi^{-1} F$

Kemudian tentukan fungsi $u_1(t)$ **dan** $u_2(t)$, **sedemikian hingga :**

$$u = \int \Phi^{-1}(t)F(t)dt$$

Resume Metode Variasi Parameter untuk menyelesaikan $x' = Ax + F(t)$

Langkah 1 : Tentukan solusi pelengkap x_e.

Selesaikan $2x\ _2$ **sistem homogen yang berbuhungan :**

$$x' = Ax$$

Bentuk matriks dasar Φ **yang kolomnya merupakan penyelesaian bebas linear** x_1 **dan** x_2.

Langkah 2 : Ubah parameter.

$$x_p = u_1(t)x_1 + u_2(t\,)x_2$$

Langkah 3 : Cari Invers matriks Φ

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{det\,\Phi}\begin{pmatrix} y_2 & -x_2 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix}$$

Langkah 4 : Tentukan parameter u_1 **dan** u_2

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \int \Phi^{-1}(t)F(t)dt$$

Langkah 5 : Hitung Solusi x_p:

$$x_p: \Phi u \quad \rightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Langkah 6 : Bentuklah solusi umum

$$x = x_e + x_p$$

Contoh :

Tentukan solusi umum system nonhomogen sbb:

$$\frac{dx}{dt} = 3x - 4y + 1$$

$$\frac{dx}{dt} = 2x - 3y + t$$

Penyelesaian :

Langkah 1 : untuk menyelesaikan system homogeny, substitusi $x = k_1 e^{\lambda t}$ dan $y = k_2 e^{\lambda t}$ kepada system homogeny untuk memperoleh fungsi aljabar

$$\frac{dx}{dt} = k_1 e^{\lambda t} \quad ; \frac{dy}{dt} = k_2 e^{\lambda t} .$$

Masukkan ke persamaan dalam soal → $x' = Ax$.

$$\left.\begin{aligned} &\rightarrow k_1 \lambda e^{\lambda t} = 3k_1 e^{\lambda t} - 4k_2 e^{\lambda t} \\ &\quad (3 - x)k_1 - 4k_2 = 0 \\ &\rightarrow k_2 \lambda e^{\lambda t} = 2k_1 e^{\lambda t} - 3k_2 e^{\lambda t} \\ &\quad 2k_1 + (-3 - \lambda)k_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{..............................(*)}$$

Determinan $= 0$

$$\begin{vmatrix} (3-\lambda) & -4 \\ 2 & (-3-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)(-3-\lambda) + 8 = 0 \qquad \rightarrow \lambda^2 - 1 = 0$$

Maka nilai eigen (eigen value) : $\lambda = -1, 1$.

Substitusi → $\lambda = -1$ ke *

$$\left.\begin{aligned} 4k_1 - 4k_2 = 0 \\ 2k_1 - 2k_2 = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow k_1 = k_2 \\ &\quad k_2 = \text{sembarang} \end{aligned}$$

Pilih $k_2 = 1$ →vektor solusi.

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Substitusi → $\lambda = 1$ ke *

$$\left.\begin{aligned} 2k_1 - 4k_2 &= 0 \\ 2k_1 - 4k_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} k_1 &= 2k_2 \\ k_2 &= \text{sembarang} \end{aligned}$$

Pilih $k_2 = 1$

Vector penyelesaian

$$x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

Matriks dasar $\Phi = \begin{pmatrix} e^{-t} & 2e^{t} \\ e^{-t} & e^{t} \end{pmatrix}$

Langkah 2 : Tulis bentuk solusi tertentu.

$$x_p = \Phi u = \begin{pmatrix} e^{-t} & 2e^{t} \\ e^{-t} & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Langkah 3 : Tentukan determinan matriks dasar Φ

$$\text{Det } \Phi = e^{-t} . e^t - 2e^{t} . e^{-t} = -1 \neq 0$$

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{(-1)} \begin{pmatrix} e^{t} & -2e^{t} \\ -e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Langkah 4 : Tentukan fungsi u_1 dan u_2

$$U' = \Phi^{-1} F = -\begin{pmatrix} e^{t} & -2e^{t} \\ -e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -e^t + 2e^{t} \\ e^{-t} - t\, e^{-t} \end{pmatrix} \begin{matrix} - - - \blacktriangleright \\ - - - \blacktriangleright \end{matrix}$$

Integrasi setiap komponen U'

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \rightarrow u_1 = \int (-e^t + 2t . e^t) dt$$

$$= -e^t + 2(t - 1). e^t = 2t\, e^t - 3e^{t}$$

$$u_2 = \int (e^{-t} - t . e^{-t}) dt$$

$$= -e^{-t} + (t + 1). e^t = t\, e^{-t}$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t\, e^t - 3e^{t} \\ t\, e^{-t} \end{pmatrix}$$

Langkah 5 : $x_p = \Phi u = \begin{pmatrix} e^{-t} & 2e^{t} \\ e^{-t} & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t\, e^{t} - 3e^{t} \\ t\, e^{-t} \end{pmatrix}$

$$x_p = \begin{pmatrix} 2t - 3 + 2t \\ 2t - 3 + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t - 3 \\ 3t - 3 \end{pmatrix}$$

Ini berarti $x_p = 4t - 3$

$$y_p = 3t - 3$$

Langkah 6 : Solusi Umum

$x = x_c + x_p$

$= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 4t - 3 \\ 3t - 3 \end{pmatrix}$

Atau, dalam bentuk komponen

$x = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{-t} + 4t - 3$

$y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-t} + 3t - 3$

<u>SISTEM LINIER DIMENSI TINGGI</u>

Teori sistem linier dimensi tinggi sama dengan system 2x2. Konstanta nxn system linier tingkat satu memiliki bentuk :

$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + f_1(t)$

$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + f_2(t)$

$\vdots$

$\vdots$

$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + f_n(t)$ ……………………………..(1)

Diasumsikan bahwa seluruh koefisien a_{ij} **adalah konstanta dan setiap fungsi** $f_i(t)$ **adalah konstanta menerus pada interval I. dalam bentuk matriks system di atas dapat dinyatakan sbb :**

$$x' = Ax + F \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(2)$$

Bila komponen $f_i(t)$ dari $F(t)$ adalah nol pada interval I, maka system (2) adalah homogen; selain itu adalah nonhomogen.

Seperti solusi system 2x2; solusi umum system nonhomogen (2) berlaku

$$x = x_c + x_p \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

Dimana x_c adalah solusi pelengkap yang menyelesaikan sistem homogen yang terkait

$$x' = Ax \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

Dan x_p adalah vektor solusi nonhomogen.

<u>SISTEM HOMOGEN</u>

Berdasarkan persamaan (4), kita asumsikan pernyelesaian persamaan tersebut :

$$x = ke^{\lambda t} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (5)$$

Dimana λ adalah konstant dan

$$k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

Diferensialkan persamaan (5) :

$$x' = \lambda ke^{\lambda t} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (6)$$

Substitusi persamaan (5) & (6) ke persamaan (4), menghasilkan

$$\lambda ke^{\lambda t} = 4ke^{\lambda t}$$

Karena $e^{\lambda t} \neq 0$, persamaan terakhir ini dapat disederhanakan menjadi

$$(A - \lambda I)k = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (7)$$

Dimana $I =$ matriks identitas, untuk solusi nontrivial,

$$det\,(A - \lambda I) = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (8)$$

Persamaan (8) adalah persamaan karakteristik persamaan (4).

Dalam bentuk komponen, persamaan karakteristik tersebut adalah

$$\boldsymbol{det}\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (9)$$

Persamaan karakteristik adalah suatu polynomial berderajat n dengan λ yang tak diketahui.

Substitusi persamaan (9) ke (7) menghasilkan sistem aljabar sbb :

$$(a_{11}-\lambda)k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1n}k_n = 0$$

$$a_{21}k_1 + (a_{22}-\lambda)k_2 + \cdots + a_{2n}k_n = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \cdots + a_{2n}k_n = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..(10)$$

Akar polynomial karakteristik pers (9) dapat dikategorikan sbb:

1. Riil dan berbeda

2. Kompleks

3. Riil dan berulang

- **Eigen Value yang riil dan berbeda**

Untuk eigen value yang riil dan berbeda, untuk setiap λ_i kita dapatkan k_i eigen vektor yang bersangkutan.

$$\left(k_1e^{\lambda_1 t}, k_2e^{\lambda_2 t}, \dots, k_ne^{\lambda_n t}\right)$$

Maka solusi umum :

$$x = C_1k_1e^{\lambda_1 t} + C_2k_2e^{\lambda_2 t} + \cdots + k_ne^{\lambda_n t} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..(11)$$

Contoh :

Selesaikan sistem $x' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$

Solusi:

Persamaan karakteristik :

$$\boldsymbol{det}\begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Atau $(4-\lambda)(1-\lambda)^2 + 2(1-\lambda) = 0$

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

Eigen value → $\lambda = 1, 2, 3$

Untuk setiap Eigen value λ **kita dapatkan Eigen vektor** k **yang bersesuaian dengan menyelesaikan sistem:**

$$(4-\lambda)k_1 \quad + \qquad\qquad k_3 = 0$$

$$-2k_1 \; + \; (1-\lambda)k_2 + \qquad = 0$$

$$-2k_1 \qquad\qquad + \; (1-\lambda)k_3 = 0$$

→ untuk $\lambda = 1$ **, menjadi :**

$$3k_1 \quad + k_3 = 0$$

$$-2k_1 \qquad = 0$$

$$-2k_1 \qquad = 0$$

Maka $k_1 = k_3 = 0$ **; dan** k_2 **adalah sebarang.**

Pilih $k_2 = 1$ **, maka eigen vector :**

$$k_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Menghasilkan solusi

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$$

→ untuk $\lambda = 2$**, menjadi :**

$$2k_1 \quad + k_3 = 0$$

$$-2k_1 - k_2 \quad = 0$$

$$-2k_1 \quad - k_3 = 0$$

$k_3 = k_2 = -2k_1$, dan $k_1 =$ sebarang. Pilih $k_1 = 1$

$$k_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Menghasilkan solusi

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2t}$$

→ **untuk** $\lambda = 3$

$$\begin{aligned} k_1 \qquad\quad + k_3 &= 0 \\ -2k_1 - 2k_2 \qquad &= 0 \\ -2k_1 \qquad - 2k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Maka $k_3 = k_2 = -k_1$. **Pilih** $k_1 = 1$

Menghasilkan eigen vektor

$$k_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

solusi

$$x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

Maka solusi umum :

$$\left\| x = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t} \right\|$$

Dalam bentuk komponen dapat dinyatakan :

$$x_1 = C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}$$

$$x_2 = C_1 e^{t} - 2C_2 e^{2t} - C_3 e^{3t}$$

$$x_3 = -2C_2 e^{2t} - C_3 e^{3t}$$

- **Kompleks Eigen Value**

Solusi umum akar kompleks $\lambda_1 = \alpha + \beta_i$; $\lambda_2 = \alpha - \beta_i$

$$x = e^{\alpha t}(C_1 B_1 \cos\beta t \; + C_2 B_2 \sin\beta t\,) + C_3 k_3 e^{\lambda 3t}$$

Contoh : selesaikan sitem.

$$x' = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} x$$

Solusi : pers. Karakteristik → eigen value :

$$det\,(A - \lambda I) = det\begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Atau $(3-\lambda)[(5-\lambda)(3-\lambda) + 2] = 0$

$(3-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 17 = 0$

Eigen value adalah $\lambda = 3$ **dan** $\lambda = 4 \pm i$

Eigen vector $(5-\lambda)k_1 + \qquad k_2 \quad - k_3 = 0$

$$-2k_1 + (3-\lambda)k_2 \qquad = 0$$

$$(3-\lambda)k_3 = 0$$

→ **untuk** $\lambda = 3$

$$2k_1 + k_2 - k_3 = 0$$

$$-2k_1 + \qquad = 0$$

$$0k_3 = 0$$

Maka $k_1 = 0$ **dan** $k_2 = k_3$; $k_2 =$ **sebarang.**

Pilih $k_3 = 1$

Eigen vector $k_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vector penyelesaian

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

$\rightarrow$ **untuk** $\boldsymbol{\lambda = 4 + i}$

$$\begin{aligned} (1-i)k_1 \quad + k_2 \quad - k_3 &= 0 \\ -2k_1 + (-1-i)\,k_2 \quad &= 0 \\ (-1-i)k_3 &= 0 \end{aligned}$$

$\boldsymbol{k_3 = 0}$ **dan** $\boldsymbol{k_2 = (-1-i)k_1}$; $\boldsymbol{k_1}$ = **sebarang. Pilih** $\boldsymbol{k_1 = 1}$.

Eigen vector $\quad \boldsymbol{k = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \\ 0 \end{pmatrix}}$

$\boldsymbol{B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$; $\boldsymbol{B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

$$\boldsymbol{x_2 = e^{4t}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} cos\,t \; + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} si\,nt\right]}$$

$$\boldsymbol{x_3 = e^{4t}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} cos\,t \; - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} si\,nt\right]}$$

Solusi umum :

$\boldsymbol{x = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3}$

Dalam bentuk komponen :

$\boldsymbol{x_1 = (C_2 cos\,t \; - C_3 si\,nt)e^{4t}}$

$\boldsymbol{x_2 = C_1e^{3t} \; + [(-C_2 - C_3)cos\,t \; + (-C_2 + C_3)si\,nt]e^{4t}}$

$\boldsymbol{x_3 = C_1e^{3t}}$