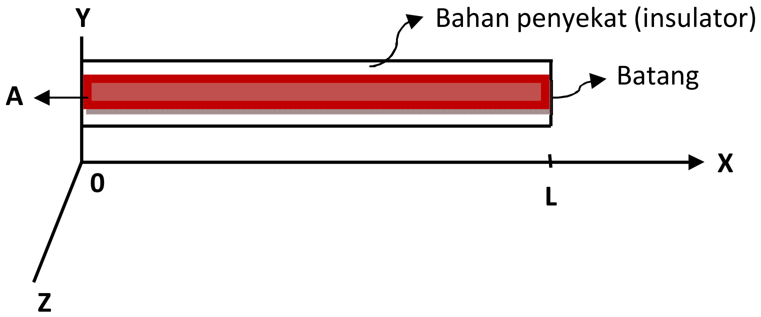
BAB VIII

PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL

1. Pendahuluan : Pemodelan Arus Panas Satu Dimensi



Misalkan bila ada batang yang dapat menghantarkan panas. Batang tersebut homogeny dengan panjang L dengan luas potongan melintang A. Batang di balut dengan bahan penyekat (insulator) sehingga tidak ada energy panas penyekat mengalir ke luar dalam arah Y & Z.

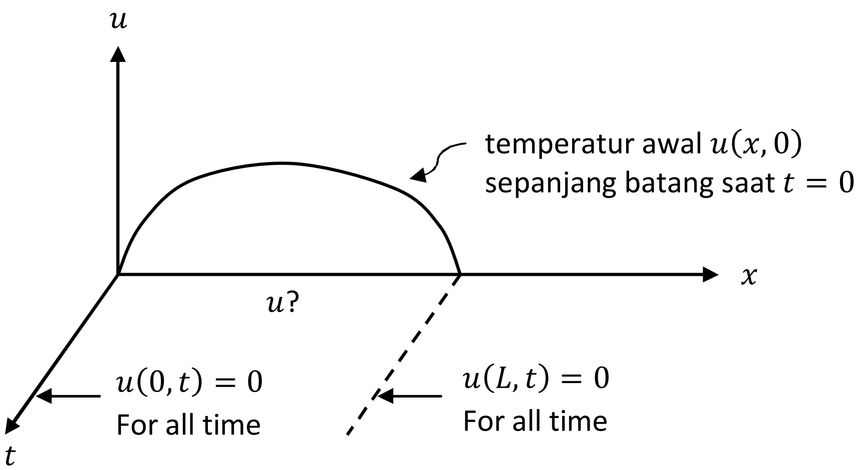
Bila $u(x,t) =$ temperatur batang pada posisi x dan pada waktu t

Temperatur didefinisikan sebagai jumlah energy panas perunit volume.

Asumsikan pada saat $t = 0$, batang mempunyai temperatur awal $u(x_{10})$ pada setiap posisi x. Dan pada ujung-ujung batang dipertahankan pada temperatur tetap yakni

$u(0,t) = u(L,t) = 0$ untuk setiap saat.

Temperatur pada saat $t > 0$,ditunjukkan pada gambar



Membuat Modal Konduksi Panas

$\boldsymbol{u(x,t)}$ = **temperatur pada posisi x saat waktu t**

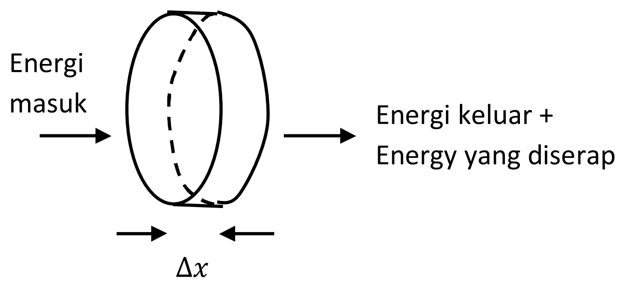
Bila diketahui temperatur awal sepanjang batang, $0 \leq x \leq L$; $t = 0$.

Bagaimana temperatur pada setiap posisi x bila $t > 0$?

Karena temperatur adalah fungsi dari dua variabel bebas, maka dibutuhkan persamaan diferensial parsial untuk mendekati perilakunya.

Perbedaan temperatur sepanjang batang menyebabkan panas mengalir dari daerah yang panas ke dingin. Bila kita definisikan fungsi aliran panas sebagai :

$\boldsymbol{q(x,t)}$ = **jumlah energy panas persatu satuan waktu yang mengalir melalui batang pada posisi x, saat waktu t.**



Ambil potongan kecil dari batng dengan lebar Δx seperti gambar diatas ; maka :

Energi masuk $= q(x,t)\Delta t$

Energi keluar $= q(x+\Delta x, t+\Delta t)\Delta t$

Energi masuk = Energi keluar + Energy yang diserap

$q(x,t)\Delta t = q(x+\Delta x, t+\Delta t)\Delta t +$ **Energy yang diserap**

Energi yang diserap adalah proporsional terhadap perubahan temperatur dikali dengan panjang potongan melintang.

Energy yang diserap $= k_1[u(x+\Delta x_1 t+\Delta t) - u(x,t)]\Delta x$

$q(x,t)\Delta t = q(x+\Delta x, t+\Delta t)\Delta t + k_1[u(x+\Delta x_1 t+\Delta t) - u(x,t)]\Delta x$

$$\frac{q(x,t)\Delta t - q(x+\Delta x, t+\Delta t)}{\Delta x} = \frac{k_1[u(x+\Delta x_1 t+\Delta t) - u(x,t)]}{\Delta t}$$

Bila $\Delta x \to 0$; $\Delta t \to 0$; maka persamaan di atas menjadi

$$\frac{-\partial q}{\partial x} = k_1 \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{..} \; (1)$$

Karena persamaan (1) terdiri dari 2 variabel terikat dan juga 2 variabel bebas x & t , maka perlu dicari hubungan q dan u , karena itu kita gunakan 2 prinsip aliran panas

- **Bila ada perbedaan temperatur, panas mengalir dari daerah yang lebih panas ke yang lebih dingin.**

- **Arus panas adalah proporsional terhadap perubahan temperatur per satuan panjang.**

Prinsip diatas secara matematik dapat dinyatakan sebagai :

$q = -\alpha \frac{\partial u}{\partial x}$ ……………………………………..(2)

$\alpha > 0$

→ **persamaan aturan Fourier pada konduksi panas**

Subsitusi (2) ke (1) menghasilkan :

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(-\alpha\frac{\partial u}{\partial x}\right) = k_1\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t} \ ; \ k = \frac{\alpha}{k_1} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(3)$$

Persamaan (3) adalah persamaan diferensial dalam bentuk

$$A(x,t)u_{xx} + B(x,t)u_{xt} + C(x,t)u_{tt} + D(x,t)u_x + E(x,t)u_t + F(x,t)u = C_+(x,t) \ldots\ldots(4)$$

Persamaan (4) disebut Persamaan Diferensial Parsial Linier Orde Kedua.

Bila $C_+(x,t) \equiv 0$ → **homogen**

$C_+(x,t) \neq 0$ → **nonhomogen**

Resume masalah nilai batas pada model di atas

- **Persamaan Dif. Parsial :** $u_{xx} = \frac{1}{k}u_t$, $k > 0, 0 < x < L, t > 0$
- **Boundary Condition (kondisi batasan)**
  $u(0,t) = T_1$
  $u(L,t) = T_2$, $t > 0$
- **Initial condition (nilai awal)**
  $u(x,0) = f(x)$, $0 < x < L$

Solusi persamaan panas dengan kondisi batasan homogen.

Kita anggap temperatur batasan adalah homogen

$T_1 = T_2 = 0$

Bila fungsi penyelesaian dapat di faktorkan menjadi suatu fungsi x **dikali dedngan , maka :**

$u(x,t) = X(x)T(t)$

Dimana $X(x)$ **dan** $T(t)$ **adalah independent variabel dan** X **hanya fungsi dari** x **dan** T **hanya fungsi dari** t**.**

$$u_t(x,t) = X(x)\frac{dT}{dt} = u(x,t) = XT'$$

$$u_{xx}(x,t) = \frac{d^2X}{dx^2}T(t) = X''T$$

$$X''T = \frac{1}{k}XT'$$

Dengan metoda pemisahan variabel didapatkan :

$\frac{X''}{X} = \frac{1}{k}\frac{T'}{T}$ → **menjadi persamaan diferesnsial biasa**

Agar persamaan tersebut valid untuk $0 < x < L$, $t > 0$**diperlukan kedua sisi persamaan sama dengan konstant**

$\frac{X''}{X} = \frac{1}{k}\frac{T'}{T} =$ **konstant ; missal konstant** $= \sigma$

Maka $X'' - \sigma x = 0$

1) **Bila** $\sigma = \lambda^2$ **(positive constan)**

Maka $X'' - \lambda^2 x = 0$;

Dari penyelesaian sebelumnya tentang persamaan diferensial biasa orde 2. Solusi umum menjadi :

$$X'' - \lambda^2 x = 0 \rightarrow x = C_1e^{\lambda x} + C_2e^{-\lambda x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

Dengan menggunakan kondisi batasan,

$$u(0,T) = 0 \quad \rightarrow X(0)T(t) = 0$$

$$u(L,T) = 0 \quad \rightarrow X(L)T(t) = 0$$

Karena $T(t) \neq 0$; **maka** $x(0) = 0$ **dan** $x(L) = 0$ **Bila sisubstitusi ke persamaan (*), diperoleh**

$0 = C_1 + C_2 \quad \rightarrow C_2 = -C_1$; **bila** $C_1 \neq 0$

$0 = C_1e^{\lambda L} + C_2e^{-\lambda L} \quad \rightarrow e^{\lambda L} = e^{-\lambda L}$ → **tidak mungkin karena** $\lambda \neq 0$

∴ **soluai trivial.**

2) **Bila** $\sigma =$ **zero constant.**
$X'' = 0$; **maka** $X = C_3x + C_4$
Bila diterapkan kondisi batasan
$0 = C_4$
$0 = C_3L + C_4$
Menghasilkan $u(x,t) \equiv 0$ **{tidak mungkin} , tidak ada penyelesaian.**
3) **Negative Konstant** $= -\lambda^2$

$$X'' - \lambda^2 x = 0 \rightarrow x = C_5\cos\lambda x + C_6\sin\lambda x$$

Dengan menggunakan syarat batas

$$0 = C_5.1 + C_6.0 \qquad \rightarrow C_5 = 0$$

$$0 = C_5 \cos \lambda L + C_6 \sin \lambda L$$

Agar solusi nontrivial , $C_6 \neq 0$ **dan** $\sin \lambda L = 0$ **yang berarti** λL **adalah pengali bilangan bulat dari** π

$$\lambda L = n\pi \ , \ \ n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\dots\dots$$

Hal ini menghasilkan $X(x) = C_6 \sin \frac{n\pi x}{L}$

Karena C_6 **konstanta sembarang dan** $\sin\left(\frac{-n\pi x}{L}\right) = -\sin \frac{n\pi x}{L}$

Kita dapat memilih n **hanya untuk bilangan bulat positif**

$$\lambda = \frac{n\pi}{L} \ ;$$

$$X(x) = C_6 \sin \frac{n\pi x}{L} \ ; \quad n = 1, 2, 3, \dots\dots\dots (*)$$

Nilai $\lambda =$ **nilai eigen (eigen value)**

Fungsi $\sin \frac{n\pi x}{L}$ **disebut fungsi eigen (eigen function)**

Kemudian kita menentukan factor $T(t)$ **yang terkait dengan fungsi** $X(x)$

$$T' + k\lambda^2 T = 0$$

Merupakan PD biasa orde 1. ; menghasilkan

$$T(t) = C_7 e^{-k\lambda^2 t} = C_7 e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (**)$$

Dari persamaan $(*)$ **&** $(**)$

$$u(x,t) = e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} . \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Dimana $B_n = C_6 C_7$

Dari prinsip superposisi

$$\left\| u(x,t) = \sum_{n=1}^{\sim} B_n . e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} . \sin \frac{n\pi x}{L} \right\|$$

Konstanta B_n **harus memenuhi persamaan berikut :**

$$u(x,0) = f(x) \ , \quad 0 < x < L$$

$$\left\|\sum_{n=1}^{\sim} B_n . \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x) \right\|$$

2. FOURIER SERIES

Deret Fourier merupakan alat yang ampuh untuh mendapatkan penyelesaian analistis dari banyak masalah dalam bidang mekanika terapan, seperti penyelesaian teori elastisitas, getaran, aliran panas, dan lain-lain.

Pada sub-bab sebelumnya kita dapatkan fungsi kondisi awal $u(x,0)$ terhadap $< x < L$; dalam bentuk deret tak hingga

$$\sum_{n=1}^{\sim} B_n . \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Yang merupakan fungsi $(x,0) = f(x)$. Bagaimana menentukan koefisien B_n dari deret tersebut?

- **Koefisien dalam deret Fourier.**
  Anggap f adalah fungsi yang didefinisikan terhadap interval simetris $-L < x < L$.
  Asumsikan bahwa f adalah dinyatakan dalam deret fourier sbb :

  $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\sim} \left[a_1 \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \,(1)$$

  Kita ingin menentukan koefisien $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots.., b_1, b_2, \ldots\ldots\ldots$

  Dari hasil integral diperoleh :

  $$\int_{-L}^{L} \cos \frac{n\pi x}{L} . \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L, & m = n \end{cases}$$

  $$\int_{-L}^{L} \sin \frac{n\pi x}{L} . \cos \frac{m\pi x}{L} dx = 0$$

  $$\int_{-L}^{L} \sin \frac{n\pi x}{L} . \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L, & m = n \end{cases}$$

  <u>Menghitung</u> a_0

  Integrasikan 2 sisi persamaan tersebut (1)

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L} dx + \sum_{n=1}^{\sim} a_n . \int_{-L}^{L} cos\,\frac{n\pi x}{L} dx + \sum_{n=1}^{\sim} b_n . \int_{-L}^{L} si\,n\,\frac{n\pi x}{L} dx \,.$$

Untuk n bilangan bulat positif ; dua integral di sisi kanan sama dengan nol. Oleh karena itu :

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L} dx = \frac{a_0 x}{2} |_{-L}^{L} = L\, a_0$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\, dx.$$

<u>Menghitung</u> a_n

Kalikan persamaan (1) dengan $\frac{m\pi x}{L}$, $m > 0$ dan integralkan hasilnya dengan $-L$ sampai L

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, cos\,\frac{m\pi x}{L} dx$$

$$= \frac{a_0 .}{2}\int_{-L}^{L} cos\,\frac{m\pi x}{L} dx + \sum_{n=1}^{\sim} a_n \int_{-L}^{L} cos\,\frac{n\pi x}{L} . cos\,\frac{m\pi x}{L} dx +$$

$$\sum_{n=1}^{\sim} b_n \int_{-L}^{L} si\,n\,\frac{n\pi x}{L} . cos\,\frac{m\pi x}{L} dx$$

Integral pertama dari sisi kanan dan integral ketiga adalah nol. ; maka diperoleh :

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, cos\,\frac{m\pi x}{L} dx = a_n \int_{-L}^{L} cos\,\frac{n\pi x}{L} . cos\,\frac{m\pi x}{L} dx = L\, a_n$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\, cos\,\frac{m\pi x}{L} dx$$

<u>Perhitungan</u> b_n

Kalikan kedua sisi persamaan (1) dengan $si\,n\,\frac{m\pi x}{L}$, $m > 0$, dan integrasikan hasilnya dari $-L$ sampai L

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, sin\, \frac{m\pi x}{L} dx = \frac{a_0.}{2} \int_{-L}^{L} sin\, \frac{m\pi x}{L} dx + \sum_{n=1}^{\sim} a_n \int_{-L}^{L} cos\, \frac{n\pi x}{L} . sin\, \frac{m\pi x}{L} dx +$$

$$\sum_{n=1}^{\sim} b_n \int_{-L}^{L} sin\, \frac{n\pi x}{L} . sin\, \frac{m\pi x}{L} dx$$

Integral pertama dan kedua sisi kanan sama dengan nol,

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, sin\, \frac{m\pi x}{L} dx = b_n \int_{-L}^{L} sin\, \frac{n\pi x}{L} . sin\, \frac{m\pi x}{L} dx = L\, b_n$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, sin\, \frac{n\pi x}{L} dx$$

<u>Resume Deret Fourier</u>

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\sim} \left[a_n cos\, \frac{n\pi x}{L} + b_n sin\, \frac{n\pi x}{L} \right]$$

Dimana :

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx.$$

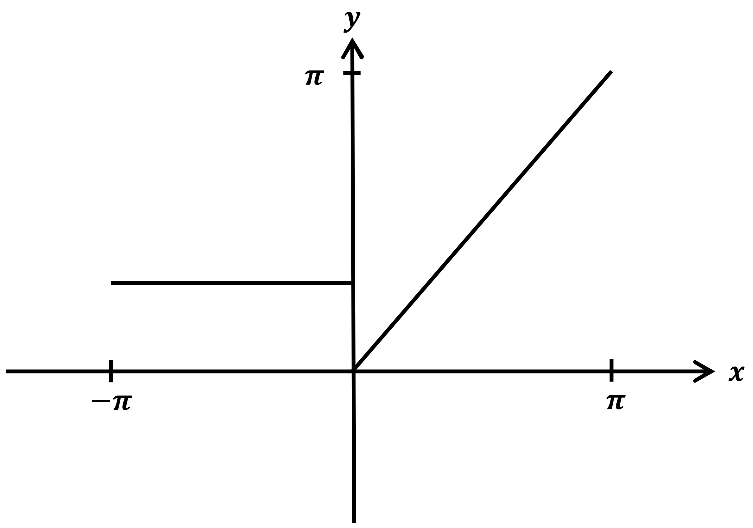
$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, cos\, \frac{m\pi x}{L} dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, sin\, \frac{n\pi x}{L} dx$$

Contoh :

Carilah deret fourier fungsibberikut :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$$



$\boldsymbol{L = \pi}$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \boldsymbol{f(x)}\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx$$

$$= 1 + \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \boldsymbol{f(x)} \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \cos nx\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos nx\, dx$$

$$= \frac{1}{n\pi} \sin nx \Big|_{-x}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{w}\sin nx\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\, d$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}\cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \boldsymbol{f(x)\, \sin nx\, dx}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \sin nx\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x \sin nx\, dx$$

$$= \frac{(-1)^n(1-\pi) - 1}{\pi n}$$

Maka :

$$\boxed{\boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\pi}{\mathbf{4}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (1-\pi) - 1}{\pi n} \sin nx}$$

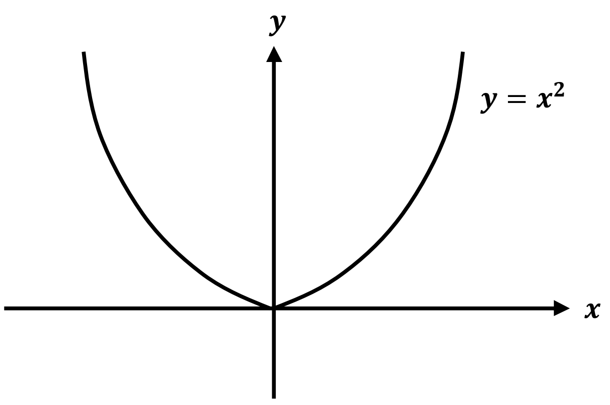
Fungsi Genap dan Gasal/Ganjil

Suatu fungsi dikatakan fungsi genap bila

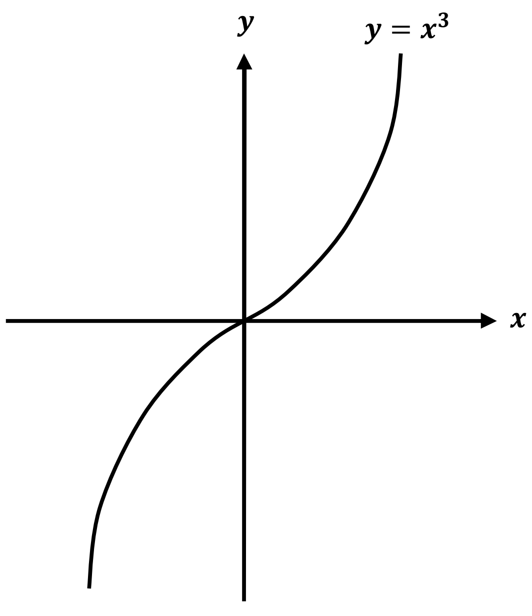
$\boldsymbol{g(-x) = g(x)}$

Dan dikatakan fungsi ganjil bila

$\boldsymbol{g(-x) = -g(x)}$



Fungsi genap → simetris terhadap sumbu $\boldsymbol{y}$



Fungsi Gasal

Karena $\boldsymbol{\cos(-x) = \cos x}$ → fungsi genap

$\boldsymbol{\sin(-x) = -\sin x}$ → fungsi gasal

Fungsi genap → $\boldsymbol{\int_{-L}^{L} g(x)dx = 2\int_{0}^{L} g(x)dx}$

Fungsi gasal → $\boldsymbol{\int_{-L}^{L} g(x)dx = 0}$

<u>Extensi fungsi genap :Deret Fourier Cosinus</u>

Bila fungsi $\boldsymbol{y = f(x)}$ ditentukan untuk interval $\mathbf{0} < x < L$.

Kita definisikan fungsi extensi dari $\boldsymbol{f}$:

$\boldsymbol{f(-x) = f(x)} \qquad \rightarrow -\boldsymbol{L} < x < L$

Maka kita dapatkan koefisien fourier.

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \boldsymbol{f(x)}\, dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \underbrace{\boldsymbol{f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}}\, dx}_{\textbf{genap}} = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\boldsymbol{\cos\frac{n\pi x}{L}}\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \underbrace{\boldsymbol{f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}}\, dx}_{\textbf{ganjil}} = 0$$

Sehingga deret fourier menjadi

$$\left.\boldsymbol{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}}\right\}$$ **Disebut sebagai deret fourier cosinus**

Dimana

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} \boldsymbol{f(x)}\, dx$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\boldsymbol{\cos\frac{n\pi x}{L}}\, dx$$

<u>Extensi fungsi gasal : Deret Fourier Sinus</u>

Karena fungsi gasal → $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)} \quad \rightarrow -\boldsymbol{L} < x < L$

Sehingga coefisient fourier

$$\boldsymbol{a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = 0}$$

$$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \underbrace{f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\, dx}_{\textbf{ganjil}} = 0}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \underbrace{f(x)\, si\, n\frac{n\pi x}{L}}_{\text{genap}} dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\, si\, n\frac{n\pi x}{L} dx$$

Sehingga deret fourier menjadi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\sim} b_n \; si\, n\frac{n\pi x}{L}$$

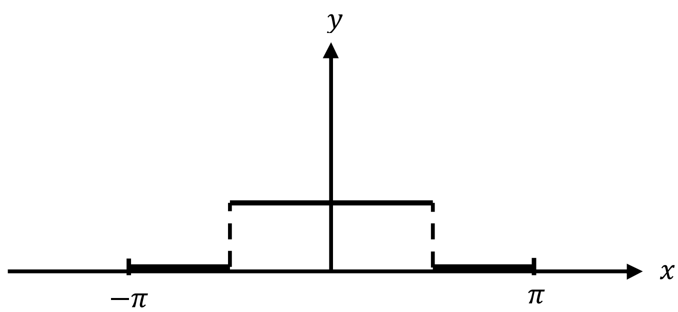
Dimana

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\, si\, n\frac{n\pi x}{L} dx$$

Contoh : Tentukan deret fourier cosinus dari fungsi :

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & 0 < x < \pi/2 \\ 0\,, & \pi/2 < x < \pi \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

Solusi : untuk deret Fourier cosinus kita pilih extensi fungsi genap f pada interval $-\pi < x < \pi$



$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} dx = \frac{2x}{\pi}\Big|_0^{\pi/2} = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\pi} dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\, si\, n\frac{n\pi}{2}$$

Oleh karena itu :

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \cos nx$$

Contoh :

Nyatakan fungsi (*) diatas dalam bentuk

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{2} \quad ; \quad L = \pi$$

Solusi :

Karena fungsi diatas merupakan deret fourier sinus , maka kita pilih fungsi extensi gasal.

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\pi} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin nx \, dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \cos nx \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{n\pi}\left(1 - \cos \frac{n\pi}{2}\right)$$

Maka

$$\left\| f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{2}\right) \sin nx \right\|$$

- **Contoh soal tentang persamaan panas**

  PDE : $U_{xx} = U_t \quad , \quad 0 < x < 1 \, , \quad t > 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1)$

  BC $: u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(2)$

  IC $: u(x,0) = \begin{cases} 1 \, , & 0 < x \\ 0 \, , & \pi/2 < x < \pi \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(3)$

Solusi :

Langkah 1 : subtansi $u = XT$ ke persamaan (1), maka

$$\frac{X''}{X} = \text{konstant} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(4)$$

$\frac{T'}{T} = $ **konstant yang sama** $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(5)$

Interpretasi kondisi batas (2) dalam bentuk XT

$u(0,t) = X(0)T(t) = 0$

Dan

$u(1,t) = X(1)T(t) = 0$

Untuk solusi non-trivial, kita memiliki hubungan :

$X(0) = 0$ **dan** $X(1) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$

Langkah 2 :

Terdapat 3 kasus untuk menyelesaikan pers (4), yaitu

Konstan : positif, nol, negatif.

Sebagaimana solusi sebelumnya, bila nilai konstan adalah positif dan nol → maka tidak ada solusi ; karena itu kita pilih konstan → negatif , $(-\lambda^2)$

$$X = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

Dengan memasukkan kondisi batas pada pers (6) kita dapat menghitung nilai konstant dan menentukan nilai eigen ; sbb :

$0 = C_1$ **dan** $0 = C_2 \sin \lambda x \ , \ C_2 \neq 0$

$\downarrow$

Agar terpenuhi λ **harus kelipatan bulat dari** π

$\lambda = n\pi \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots.$

Karena $C_1 = 0$ **maka pers (7) menjadi**

$X(x) = C_2 \sin n\pi x$

Langkah 3 : Selesaikan persamaan diferensial biasa tingkat 1.

$$\frac{T'}{T} = -\lambda^2 = -n^2\pi^2$$

Dengan integral diperoleh

$T(t) = C_3 e^{-n^2\pi^2 t}$

Sehingga, untuk setiap n **bilangan bulat positif kita peroleh**

$U_n(x,t) = XT = B_n . e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x$

Dimana $B_n = C_2 C_3$

Langkah 4 : Dengan prinsip superposisi untuk deret tak hingga

$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x$

Dengan batasan pers (2).

Langkah 5 : Tentukan nilai B_n **adalah koefisien deret fourier sinus untuk fungsi** $u(x,0)$

$$B_n = \frac{2}{1}\int_0^{0.5} 1\, \sin n\pi x\, dx$$

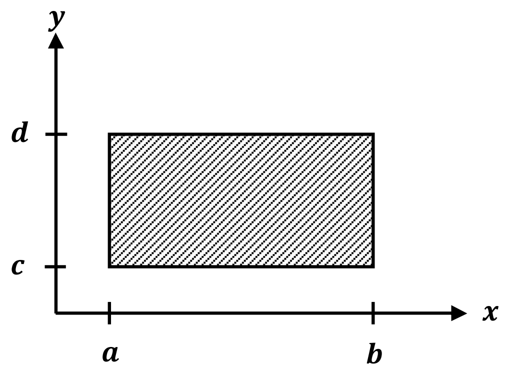
$$= \frac{2}{n\pi} \cos n\pi x \Big|_0^{0.5} = \frac{2}{n\pi}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right)$$

Sehingga penyelesaian persaman panas satu dimensi adalah

$$\left\| U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \cos n\pi x \Big|_0^{0.5} = \frac{2}{n\pi}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right) e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x \right\|$$

Persamaan Laplace dan Temperatur Keadaan Tetap (Steady-state)

Bila pelat 2 dimensi persegi panjang sbb :



Bila kita asumsikan bagian atas dan bawah pelat benar-benar tersekat (terisolasi) , sehingga panas hanya bisa merambat pada arah x dan y . karena posisi x dan y berubah terhadap waktu t , maka

$$U = u(x, y, t)$$

bila $k =$ difusi panas dari material/plat tersebut, maka

<u>Persamaan dua dimensi panas</u> sbb:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}$$

Penjumlahan dari 2 turunan parsial kedua dinamakan Laplacian dari fungsi tsb yang disimbolkan dengan :

$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; ∇^2 **=del squared u**

$$\nabla^2 u = \frac{1}{k} u_t$$

Bila dalam kondisi *steady-state*, maka temperature hanya fungsi dari x dan y saja. Sehingga

$\nabla^2 u = 0$ **atau** $U_{xx} + U_{yy} = 0$ ……………………………………..(1)

Persamaan (1) ini disebut <u>PERSAMAAN LAPLACE</u>

Dalam bidang teknik sipil , persamaan laplace banyak dipakai dalam teori elastisitas

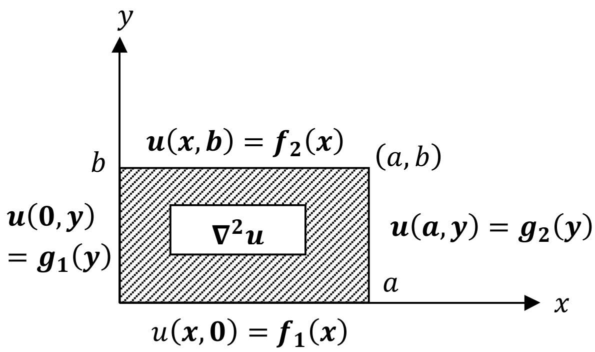
<u>Kondisi Batas</u>

Dalam kasus *steady-state* , bila persamaan laplace ditentukan berdasarkan nilai kondisi batas dinamakan dengan *Dirichlet Problem*.

PDE : $U_{xx} + U_{yy} = 0$

BC : $u(x,0) = f_1(x),\ u(x,b) = f_2(x)\ ,\ 0 < x < a$

$u(0,y) = g_1(y),\ u(a,y) = g_2(y)\ ,\ 0 < y < b$



<u>Solusi Dirichlet Problem</u>

$u(x,0) = u(0,y) = u(x,b) = 0$ **dan** $u(a,y) = g_2(x)$ ……………………………. (2)

$U(x,y) = X(x)Y(y)$ ………………………………….(3)

Substitusi (3) ke pers. Laplace

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda$$

$$X'' - \lambda X = 0$$

$$Y'' - \lambda Y = 0$$

Untuk kondisi batas homogeny

$$X(0) = 0$$

$$Y(0) = Y(b) = 0$$

Selanjutnya perhitungan dilakukan dengan langkah berikut :

1) Eigen Value

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots\dots\dots$$

fungsi eigen yang bersesuaian dan memenuhi kondisi batas

$$Y_n = \sin\frac{n\pi y}{b}$$

2) Untuk setiap λ

$$X_n(x) = A_n \cosh \frac{n\pi x}{b} + B_n \sinh \frac{n\pi x}{b}$$

Karena $A_n = 0$

$$X_n(x) = B_n \sinh \frac{n\pi x}{b}$$

3) Dengan prinsip superposisi

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh \frac{n\pi x}{b} \sinh \frac{n\pi y}{b}$$

4) Menentukan Koefisien B_n

$$U(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{B_n \sinh \frac{n\pi a}{b}}_{\text{Koefisien deret fourier}} \sin \frac{n\pi y}{b} = g_2(y)$$

$$B_n \sinh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b g_2(y) \sin \frac{n\pi y}{b}\, dy$$