The 2nd National Civil Engineering Conference & Call For Paper
DESIGN, OPERATION, MAINTENANCE AND RISK MANAGEMENT OF CONSTRUCTIONS
Semarang, 20 - 21 Desember 2006

Teknik Simulasi Untuk Memprediksi Keandalan Lendutan Balok Statis Tertentu

Yosafat Aji Pranata

Abstrak

Balok merupakan salah satu elemen struktur utama pada struktur bangunan gedung. Salah satu kriteria kenyamanan suatu struktur adalah lendutan. Beberapa metode penyelesaian, yaitu perhitungan secara analitis dengan metode integrasi momen lentur, metode balok konjugasi, atau simulasi numerik metode elemen hingga dapat dilakukan untuk menghitung lendutan. Pada suatu formulasi persamaan implisit dengan adanya suatu parameter ketidakpastian, perlu dilakukan perhitungan keandalan. Penulisan ini bertujuan melakukan simulasi metode elemen hingga untuk menentukan lendutan dan melakukan simulasi Monte Carlo untuk memprediksi keandalannya. Studi kasus menggunakan model balok kantilever statis tertentu, penampang segiempat dengan lebar dan tinggi penampang 300 mm dan 600 mm, panjang bentang balok 4 m. Kondisi tumpuan jepit-bebas pada kedua ujung, dengan beban terpusat sebesar 1500 N di ujung bebas. Simulasi Monte Carlo menggunakan beban terpusat sebagai bilangan acak dengan distribusi seragam dan normal. Hasil studi menunjukkan bahwa lendutan perhitungan secara analitis diperoleh 0,2963 mm, simulasi MEH 0,30071 mm, dan simulasi Monte Carlo untuk 10, 100, 10000, dan 100000 data acak terdistribusi seragam berturut-turut 0,3095 mm, 0,30067 mm, 0,29768 mm, dan 0,29635 mm, sedangkan simulasi dengan data acak terdistribusi normal diperoleh berturut-turut 0,29632 mm, 0,29632 mm, 0,29648 mm, dan 0,29637 mm. Hal ini menunjukkan bahwa simulasi Monte Carlo cukup rasional digunakan untuk memprediksi keandalan lendutan pada balok.

Kata kunci : *Balok statis tertentu, Monte Carlo, Metode Elemen Hingga, Lendutan*.

1. Pendahuluan

Permasalahan mengenai ketidakpastian berhubungan erat dalam perencanaan suatu struktur. Parameter-parameter dalam pemodelan suatu elemen struktur bukanlah suatu jumlah yang benar-benar diketahui, tetapi nilai prediksi atau bilangan acak. Sebagai contoh adalah beban yang bekerja pada struktur, modulus elastisitas, dimensi penampang, dan sebagainya. Maka dalam perencanaan struktur diperlukan pula perhitungan keandalan atau probabilitas terhadap kegagalan.

Pada saat ini terdapat beberapa teknik simulasi yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan numerik yang berhubungan dengan keandalan struktur. Sebagai contoh teknik

Jurusan Teknik Sipil, Universitas Kristen Maranatha - Jln. Suria Sumantri 65, Bandung 40164
E-mail : yosafat.ap@eng.maranatha.edu

simulasi *Monte Carlo*, simulasi *Latin Hypercube Sampling*, dan simulasi *rosenblueth's 2K+1 point estimate*. Dalam beberapa hal mungkin saja suatu persamaan numerik ternyata sangatlah kompleks dan waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan persamaan tersebut dalam satu kali *trial* dibutuhkan waktu lama. Maka hasilnya, untuk ribuan bahkan jutaan simulasi tentu menjadi sangat lama. Oleh karena itu, diperlukan suatu teknik untuk menyelesaikan hal ini, dengan menghasilkan jawaban yang rasional dan memiliki tingkat ketelitian yang cukup baik. Tujuan dalam penulisan ini sebagai berikut:

1. melakukan simulasi Metode Elemen Hingga untuk menentukan lendutan balok,
2. melakukan simulasi *Monte Carlo* untuk memprediksi keandalan lendutan balok.

Ruang lingkup dalam penulisan ini sebagai berikut:

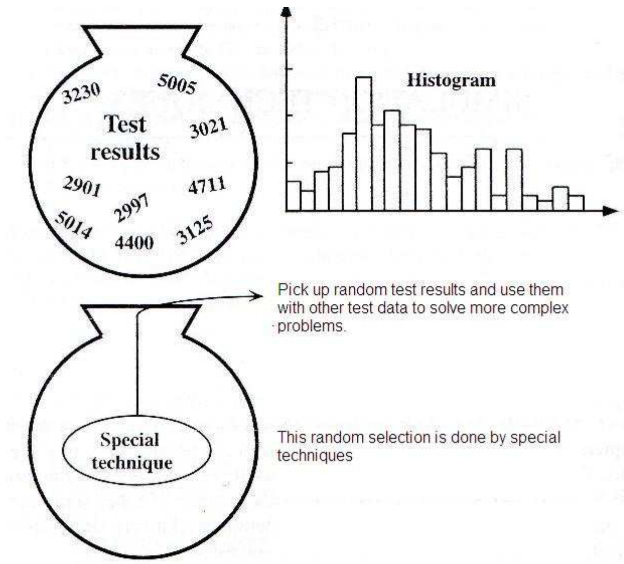
1. model struktur yang ditinjau adalah balok kantilever statis tertentu,
2. asumsi tumpuan yang digunakan adalah jepit-bebas pada ujung-ujung balok,
3. beban yang bekerja adalah beban terpusat di ujung bebas,
4. asumsi berat sendiri balok dan deformasi geser diabaikan,
5. simulasi menggunakan beban terpusat sebagai parameter bilangan acak dengan distribusi seragam dan normal.

2. Tinjauan Literatur

2.1. Teknik Simulasi *Monte Carlo*

Teknik simulasi *Monte Carlo* merupakan suatu teknik spesial dimana kita dapat membangkitkan beberapa hasil numerik tanpa secara aktual melakukan suatu tes eksperimen. Kita dapat menggunakan hasil dari tes sebelumnya yang pernah dilakukan untuk menentukan distribusi probabilitas dari parameter-parameter yang ditinjau dalam kasus tersebut. Kemudian kita menggunakan informasi ini untuk membangkitkan parameter-paramater data numerik.

Dasar dari prosedur teknik simulasi *Monte Carlo* adalah membangkitkan bilangan acak yang terdistribusi seragam antara 0 dan 1.



Gambar 2.1. Simulasi Monte Carlo *[Nowak, 2000]*

Metode monte carlo seringkali diterapkan dalam tiga situasi:

1. untuk menyelesaikan suatu problem kompleks dengan solusi pendekatan,
2. untuk menyelesaikan suatu problem kompleks yang pada umumnya dalam penyelesaiannya dilakukan penyederhanaan asumsi. Dengan simulasi *Monte Carlo*, problem asli dapat dipelajari tanpa asumsi tersebut,
3. untuk digunakan dalam cek hasil dari teknik simulasi yang lain.

2.2. Bilangan Acak dengan Distribusi Seragam

Pada bilangan acak dengan distribusi seragam, fungsi *PDF* (*probability density function*) bernilai konstan untuk semua kemungkinan nilai dari bilangan acak dengan *a* dan *b* adalah batas.

Persamaan *PDF*, *mean* dan variansi dapat dihitung dengan Persamaan 1, Persamaan 2, dan Persamaan 3.

$$PDF = f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{sebaliknya} \end{cases} \tag{1}$$

$$\mu_X = \frac{a+b}{2} \tag{2}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \tag{3}$$

2.3. Bilangan Acak dengan Distribusi Normal

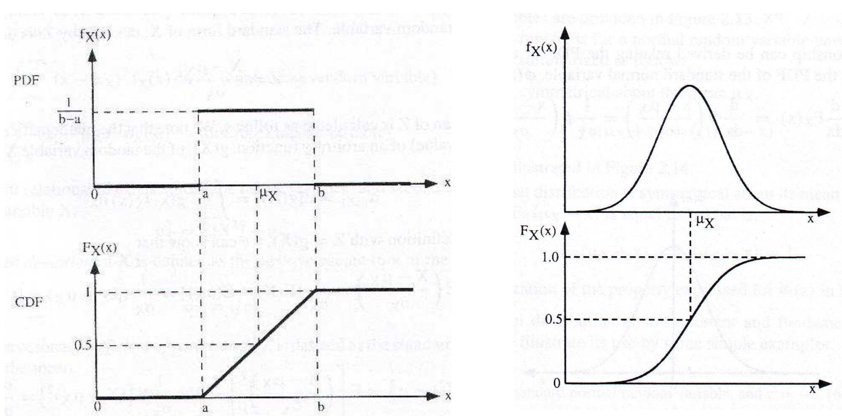
Bilangan acak dengan distribusi seragam merupakan komponen penting dalam teori keandalan struktur. Fungsi *PDF* dan *CDF*, dan pembangkit bilangan acak dapat dihitung dengan Persamaan 4, Persamaan 5, dan Persamaan 6.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right] \tag{4}$$

$$\Phi(z) = 1 - \Phi(-z) \tag{5}$$

$$X = \mu_X + Z.\sigma_X \tag{6}$$

keterangan: μ_X dan σ_X adalah *mean* dan standar deviasi.

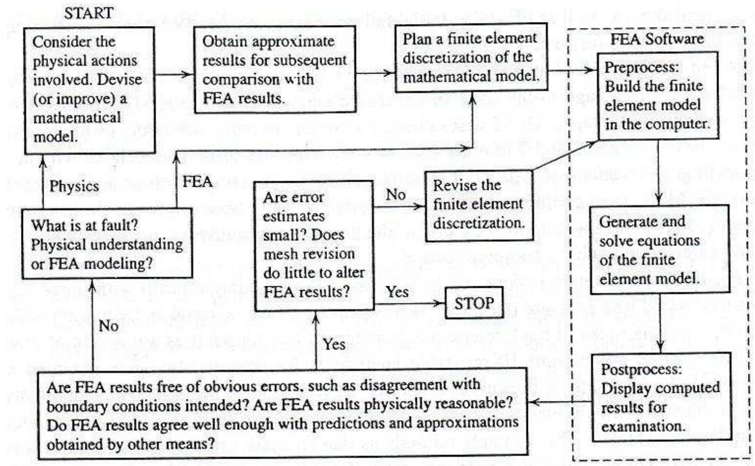


(a). bilangan acak seragam (b). bilangan acak normal

Gambar 2.2. ***PDF* dan *CDF*** *[Nowak, 2000]*

2.4. Metode Elemen Hingga

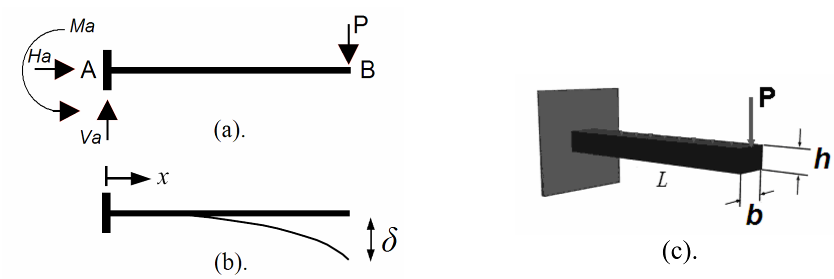
Metode elemen hingga (MEH) merupakan suatu simulasi numerik untuk mendapatkan suatu hasil pendekatan, dari suatu masalah dengan syarat-syarat batas tertentu. Banyak dijumpai permasalahan yang berhubungan dengan perhitungan numerik. Pada suatu tingkat-tingkat permasalahan tertentu, penyelesaian tidak dapat diselesaikan dengan metode analitis, sehingga perlu digunakan pendekatan metode elemen hingga sebagai solusinya. Konsep elemen hingga merupakan bagian-bagian kecil dari struktur aktual. Namun, secara umum struktur aktual perilakunya tidaklah demikian. Pemodelan MEH hanyalah merupakan sebuah model elemen hingga “yang mungkin” pada struktur aktualnya.



Gambar 2.3. Skema Metode Elemen Hingga *[Cook, et al., 2004]*

2.5. Lendutan Balok Statis Tertentu

Suatu balok dengan sumbu longitudinal lurus dibebani oleh gaya-gaya lateral, maka sumbu tersebut akan terdeformasi menjadi suatu lengkungan, yang disebut kurva defleksi balok [Gere, 2001].



Gambar 2.4. (a). *Free-body diagrams*, (*b*). Lendutan balok, dan (c). Model 3D balok kantilever

Beberapa metode analitis dapat dilakukan untuk mendapatkan persamaan lendutan, yaitu antara lain metode integrasi momen lentur, metode balok konjugasi, dan lain sebagainya. Untuk balok kantilever statis tertentu dengan beban terpusat diujung bebas, seperti terlihat pada Gambar 4.a dan Gambar 4.c, persamaan umum lendutan dapat dihitung dengan Persamaan 7.

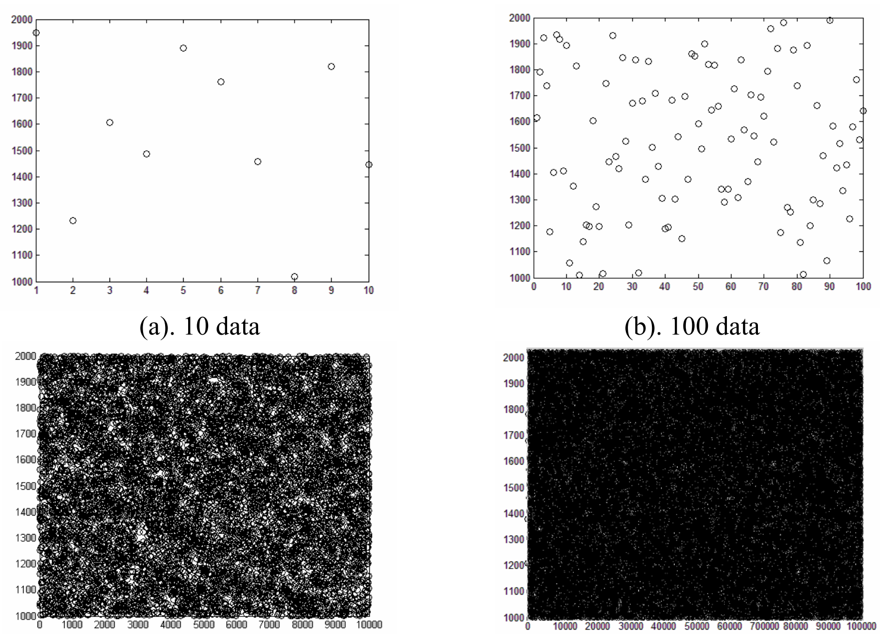
$$v_{(x)} = \frac{P.x^3}{6.E.I} - \frac{P.L.x^2}{2.E.I} \tag{7}$$

3. Studi Kasus dan Pembahasan

Penulisan ini menggunakan studi kasus berupa balok kantilever statis tertentu (tumpuan : jepit-bebas) dengan beban terpusat pada ujung bebas, bentuk penampang segiempat dengan dimensi dan ukuran penampang b = 300 mm dan h = 600 mm. Panjang bentang balok 4 meter. Beban terpusat (P) sebesar 1500 N. Asumsi modulus elastisitas (E) sebesar 20000 MPa.

3.1. Asumsi Data Beban

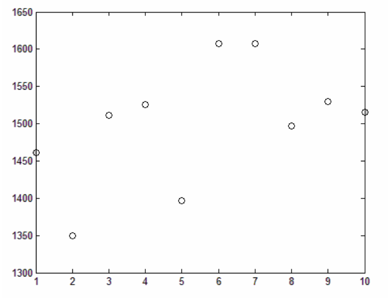
Simulasi menggunakan parameter bilangan acak beban terpusat, dengan distribusi seragam dan normal masing-masing 4 set data yaitu ; 10, 100, 10000, dan 100000 data.



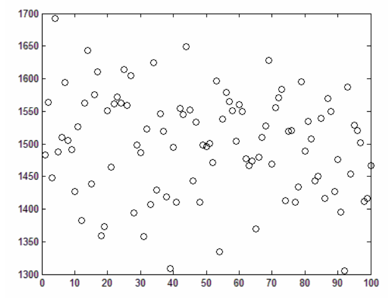
(a). 10 data (b). 100 data

(c). 10000 data (d). 100000 data

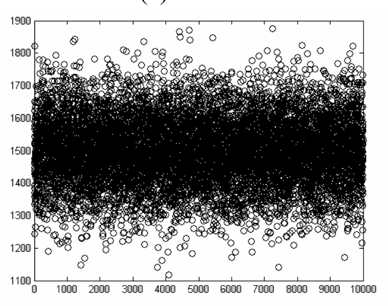
Gambar 2.5. Bilangan acak dengan disribusi seragam



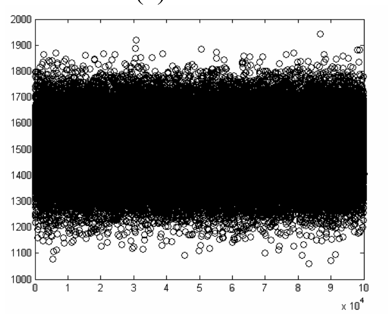
(a). 10 data



(b). 100 data



(c). 10000 data



(d). 100000 data

Gambar 2.6. Bilangan acak dengan disribusi normal

Data sintetik yang digunakan pada masing-masing set data tersebut dibangkitkan dengan *range* beban antara 1000 N sampai dengan 2000 N, baik pada bilangan acak seragam dan bilangan acak normal.

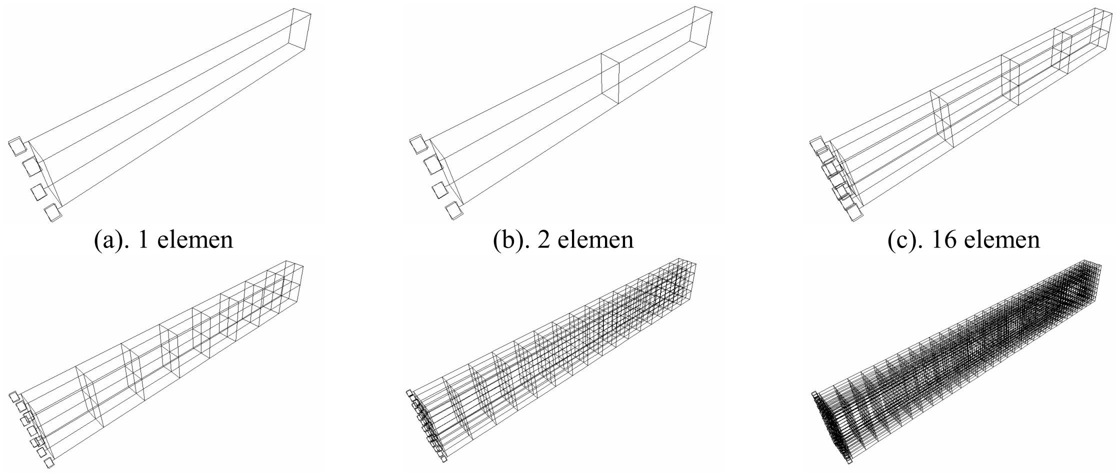
3.2. Penyelesaian dengan cara Analitis

Penyelesaian secara analitis dapat dihitung dengan Persamaan 7. Lendutan maksimum terjadi pada ujung bebas balok, atau x = 4 meter.

$$\delta_{maks} = -v_{(L)} = -\left(\frac{P.(L)^3}{6.E.I} - \frac{P.L.(L)^2}{2.E.I} \right) = \frac{P.L^3}{3.E.I} = 0,296296 \text{ meter}$$

3.3. Penyelesaian dengan Metode Elemen Hingga

Simulasi numerik MEH dilakukan dengan *software SAP2000* [CSI, 2006], dengan model balok menggunakan properti *solid*. Untuk mendapatkan hasil dengan tingkat ketelitian yang cukup baik (konvergen), maka dilakukan simulasi pada beberapa pemodelan dengan variasi jumlah elemen yang berbeda. Model-model yang digunakan dalam simulasi dapat dilihat pada Gambar 2.7.



(a). 1 elemen (b). 2 elemen (c). 16 elemen

(d). 32 elemen (e). 256 elemen (f). 2048 elemen

Gambar 2.7. Beberapa model untuk simulasi MEH.

Selanjutnya dilakukan simulasi dengan *software SAP2000*. Hasil simulasi selengkapnya ditampilkan dalam Tabel 3.1.

Tabel 3.1. Simulasi numerik MEH.

Model	Jumlah Elemen	Lendutan (mm)	% relatif
M1	1	0,22368	-
M2	2	0,27707	23,87
M3	16	0,29072	4,93
M4	32	0,29675	2,07
M5	256	0,29943	0,90
M6	2048	0,30071	0,43

Hasil simulasi memperlihatkan bahwa tingkat % relatif pada model dengan jumlah elemen yang semakin banyak (atau model dengan ukuran elemen yang semakin diperkecil) menjadi semakin kecil. Hal ini menunjukkan bahwa pada model balok-M6, hasil lendutan dapat dianggap konvergen karena tingkat % relatif sebesar 0,43 %.

3.4. Simulasi Monte Carlo

Analisis keandalan lendutan dilakukan dengan menggunakan persamaan lendutan dari metode analitis (Persamaan 7).

Dalam penulisan ini, data sintetik berupa bilangan-bilangan acak distribusi seragam dan normal dibangkitkan masing-masing 4 set data, yaitu 10, 100, 10000, dan 100000 data dengan menggunakan *software MATLAB* [Mathworks, 2005]. Selanjutnya dilakukan simulasi untuk tiap set data. Hasil simulasi selengkapnya ditampilkan dalam **Tabel 3.2** dan **Tabel 3.3.**

Tabel 3.2. Hasil simulasi untuk bilangan acak seragam

Jumlah Data	Defleksi (*mean*)
10	0,30950
100	0,30067
10000	0,29768
100000	0,29635

Tabel 3.3. Hasil simulasi untuk bilangan acak normal

Jumlah Data	Defleksi (*mean*)	Standar Deviasi
10	0,29632	0,016122
100	0,29632	0,015417
10000	0,29648	0,019936
100000	0,29637	0,019837

3.5. Pembahasan

Secara umum, dapat dilihat bahwa hasil perhitungan lendutan secara analitis diperoleh sebesar 0,296296 meter, hasil simulasi numerik MEH diperoleh sebesar 0,30071 meter. Perbedaan hasil antara simulasi MEH dengan analitis sebesar 1,49 %. Perbedaan hasil simulasi *Monte Carlo* dengan analitis untuk 10, 100, 10000, dan 100000 data bilangan acak seragam berturut-turut 4,46 %, 1,48 %, 0,47 %, dan 0,018 %. Perbedaan hasil simulasi *Monte Carlo* dengan analitis untuk 10, 100, 10000, dan 100000 data bilangan acak normal berturut-turut 0,008%, 0,008%, 0,062%, dan 0,025%.

4. Kesimpulan

Kesimpulan dari penulisan ini sebagai berikut:

1. simulasi numerik MEH menghasilkan tingkat ketelitian semakin tinggi sampai dengan konvergen, dengan membagi elemen semakin kecil / jumlah elemen diperbanyak pada model balok,
2. simulasi *Monte Carlo* dengan bilangan acak terdistribusi seragam memberikan perbedaan hasil berkisar antar 0,018 % - 4,46 %,
3. simulasi *Monte Carlo* dengan bilangan acak terdistribusi normal memberikan perbedaan hasil berkisar antar 0,008 % - 0,025 %,
4. simulasi numerik MEH cukup baik digunakan untuk menghitung lendutan balok, hal ini dapat dilihat dari hasil tingkat ketelitian yang semakin baik (konvergen),

5. simulasi *Monte Carlo* cukup baik dan rasional untuk memprediksi keandalan lendutan balok, hal ini dapat dilihat dari hasil tingkat ketelitian yang cukup tinggi.

5. Referensi

Computer and Structures, Inc. (2006), *SAP2000 Advanced Tutorials*, Computer and Structures, Inc., Berkeley, CA.

Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E., Witt, R.J. (2004), *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley and Sons, Inc.

Gere, J.M. (2001), *Mechanics of Materials – 5th Edition*, Brooks/Cole, Thomson Learning.

Nowak, A.S., Collins, K.R. (2000), *Reliability of Structures*, McGraw-Hill Book Co, Singapore.

Setiawan, S. (2006), *Keandalan Struktur Balok Sederhana dengan Simulasi Monte Carlo*, Tugas Akhir, Universitas Kristen Maranatha.

The Mathworks, Inc. (2005), *Matlab Documentation – Release 14 with service pack 3*, The Mathworks, Inc.

Todinov, M. (2005), *Reliability and Risk Models : Setting Reliability Requirements*, John Wiley and Sons, Inc.

url: http://www.wikipedia.org