BAB I

DASAR-DASAR LOGIKA

1.1 Pendahuluan

Logika adalah suatu displin yang berhubungan dengan metode berpikir. Pada tingkat dasar, logika memberikan aturan-aturan dan teknik-teknik untuk menentukan apakah suatu argumen yang diberikan adalah valid. Berpikir logis digunakan dalam matematika untuk membuktikan teorema-teorema, dalam ilmu komputer untuk menguji kebenaran dari program dan untuk membuktikan teorema-teorema, dalam ilmu pengetahuan alam untuk menarik kesimpulan dari eksperimen-eksperimen, dalam ilmu pengetahuan sosial dan dalam kehidupan sehari-hari untuk menyelesaikan banyak masalah. Tentu saja, kita tak henti-hentinya menggunakan pemikiran yang logis.

Dalam logika kita tertarik kepada benar atau salahnya dari pernyataan-pernyataan (statemen-statemen), dan bagaimana kebenaran/kesalahan dari suatu statemen dapat ditentukan dari statemen-statemen lain. Akan tetapi, sebagai pengganti dari statemen-statemen spesifik, kita akan menggunakan simbol-simbol untuk menyajikan sebarang statemen-statemen sehingga hasilnya dapat digunakan dalam banyak kasus yang serupa.

1.2 Pernyataan

Unit terkecil yang berhubungan dengan logika (proposisional) adalah kalimat. Kalimat-kalimat yang diperhatikan dalam logika bukan sebarang kalimat tetapi kalimat-kalimat yang bernilai benar atau salah, tetapi tidak keduanya. Jenis kalimat ini disebut **pernyataan** atau **statemen** (*statement*).

Setiap pernyataan adalah sebuah kalimat, tetapi sebuah kalimat belum tentu sebuah pernyataan. Hanyalah kalimat-kalimat yang bersifat “menerangkan sesuatu” (*kalimat deklaratif*) yang dapat digolongkan sebagai pernyataan. Akan tetapi, tidak semua kalimat yang menerangkan sesuatu dapat digolongkan sebagai pernyataan.

Jadi, **pernyataan** adalah kalimat deklaratif yang bernilai benar atau salah, tetapi tidak keduanya. Istilah lain dari pernyataan adalah **proposisi** (*propositions*) atau **kalimat tertutup**.

Jika sebuah pernyataan benar, maka pernyataan tersebut dikatakan mempunyai nilai kebenaran "**benar**"; jika sebuah pernyataan salah, maka nilai kebenarannya adalah "**salah**".

Contoh 1.1

Berikut ini adalah contoh pernyataan:

(a) Bumi adalah bulat.
(b) $2+3=5$.
(c) Air adalah benda padat
(d) Temperatur pada permukaan planet Venus adalah 800^0F.
(e) Matahari akan terbit besok pagi.

Kalimat (a) dan (b) adalah pernyataan dengan nilai kebenaran "benar". Kalimat (c) adalah pernyataan dengan nilai kebenaran "salah". Kalimat (d) adalah kalimat deklaratif yang nilai benar atau salahnya kita tidak tahu pada saat ini.; akan tetapi pada prinsipnya kita dapat menentukan nilai kebenarannya sehingga (d) adalah pernyataan. Kalimat (e) adalah pernyataan karena bernilai benar atau salah, tetapi tidak keduanya, meskipun kita harus menunggu sampai besok pagi untuk memastikan nilai kebenarannya.

Contoh 1.2

Berikut ini adalah contoh bukan pernyataan:

(a) Bukalah pintu itu!
(b) Apakah anda dapat berbahasa Cina?.
(c) x lebih besar dari 3 (x adalah variabel yang menunjukkan bilangan).

Kalimat (a) adalah perintah dan kalimat (b) adalah pertanyaan. Kalimat (c) bukan pernyataan karena nilai tertentu yang diberikan untuk x kita tidak dapat mengatakan apakah bernilai benar (lebih besar 3) atau salah (lebih kecil atau sama dengan 3).

1.3 Pernyataan Majemuk dan Penghubung Logika

1.3.1 Pernyataan Majemuk

Kalimat-kalimat sederhana yang benar atau salah adalah dasar dari pernyataan. Kalimat-kalimat yang lebih besar dan kompleks dapat dikonstruksi dari pernyataan dasar dengan mengkombinasikannya dengan penghubung logika (*connectives*). Jadi, proposisi dan penghubung logika adalah unsur dasar dari logika proposisional.

Dalam matematika, huruf-huruf $x, y, z, \ldots$ melambangkan variabel yang dapat diganti dengan bilangan riil dan variabel-variabel ini dapat dikombinasikan dengan operasi hitung $+$, $\times$, $-$, dan $\div$. Dalam logika, huruf-huruf $p, q, r, \ldots$ melambangkan **variabel-variabel pernyataan**, artinya variabel yang dapat diganti dengan pernyataan.

Contoh 1.3

Berikut ini adalah contoh variabel pernyataan:

$p:\ 2+3=5$.

$q:\ 2$ adalah bilangan prima.

$r:\ \sqrt{2}$ adalah bilangan rasional.

Pernyataan-pernyataan yang disajikan dengan huruf-huruf p, q dan r dinamakan sebagai **pernyataan *primitif***.

Variabel-variabel pernyataan dapat digabungkan dengan penghubung-penghubung logika untuk memperoleh **pernyataan *majemuk*** (*compound statements*). Nilai kebenaran dari sebuah pernyataan majemuk hanya bergantung pada nilai-nilai kebenaran dari variabel-variabel pernyataannya (komponen-komponennya) dan pada jenis penghubung logika yang digunakan. Sebagai contoh, kita dapat mengkombinasikan variabel-variabel pernyataan dalam Contoh 1.3 dengan penghubung *dan* (*and*) untuk membentuk pernyataan majemuk

2 adalah bilangan prima *dan* $\sqrt{2}$ adalah bilangan rasional

atau

$$q \ dan \ r\,.$$

Hubungan dari nilai kebenaran pernyataan majemuk dan variabel-variabel penyusunnya dapat disajikan dengan sebuah tabel. Tabel ini menyajikan nilai dari sebuah pernyataan majemuk untuk semua nilai yang mungkin dari variabel-variabel penyusunnya dan disebut **tabel kebenaran** (*truth table*). Dalam membuat tabel kebenaran, ditulis "T" untuk *benar* (T*rue*) dan "F" untuk *salah.* (*False*)

1.3.2 Penghubung Logika

Ada lima jenis penghubung logika yang dapat dipakai untuk meng-gabungkan pernyataan-pernyataan menjadi pernyataan majemuk, yaitu: *negasi* (*negation*), *konjungsi* (*conjunction*), *disjungsi* (*disjunction*), *implikasi* (*implication*), dan *biimplikasi* (*biimplication*). Tabel 1.1 menyajikan jenis, simbol dan bentuk dari lima penghubung logika.

Tabel 1.1

Jenis Penghubung	**Simbol**	**Bentuk**
Negasi (*Not*)	$\neg$ atau ~	tidak …
Konjungsi (*And*)	$\wedge$	…dan…
Disjungsi (*Or*)	$\vee$	…atau…
Implikasi	$\Rightarrow$	Jika… maka…
Biimplikasi	$\Leftrightarrow$	…jika dan hanya jika…

Prioritas dari penghubung-penghubung logika disajikan dalam Tabel 1.2 . Penghubung dengan prioritas lebih tinggi harus diselesaikan lebih dahulu.

Tabel 1.2

Penghubung	Prioritas
Negasi (*Not*)	5
Konjungsi (*And*)	4
Disjungsi (*Or*)	3
Implikasi	2
Biimplikasi	1

Untuk mereduksi jumlah tanda (simbol) dan bentuk digunakan perjanjian "Tanda kurung dapat dihilangkan apabila pernyataan dapat dikonstruksi dengan prioritas penghubung".

1. Negasi

Misalkan p sebuah pernyataan. *Negasi (ingkaran) dari* p adalah pernyataan *tidak* p, yang dilambangkan dengan $\neg p$ atau $\sim p$. Jadi, jika p bernilai benar, maka $\neg p$ bernilai salah, dan jika p bernilai salah, maka $\neg p$ bernilai benar. Tabel kebenaran $\neg p$ relatif terhadap p disajikan dalam Tabel 1.3.

Tabel 1.3

p	$\neg p$
T	F
F	T

Contoh 1.4

Tentukan negasi dari pernyataan-pernyataan berikut:

(a) $p:\ 2+3>5$

(b) $q:\ 5-2=3$

(c) $r:$ Hari ini hujan

Penyelesaian:

(a) $\neg p:\ 2+3\leq 5$

(b) $\neg q:\ 5-2\neq 3$

(c) $\neg r:$ Hari ini tidak hujan.

2. Konjungsi

Misalkan p dan q adalah pernyataan. Konjungsi dari p dan q adalah pernyataan majemuk "p dan q", yang dilambangkan dengan $p\wedge q$. Pernyataan majemuk $p\wedge q$ bernilai benar jika p dan q keduanya benar. Pernyataan majemuk $p\wedge q$ bernilai salah jika salah satu p atau q salah, atau p dan q keduanya salah. Tabel kebenaran $p\wedge q$ disajikan dalam Tabel 1.4.

Tabel 1.4

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Contoh 1.5

Bentuklah konjungsi dari p dan q:

(a) $p: \; 2+3>5$; $q: \; 5-2=3$

(b) $p: \; -3>-7$; $q: \; 3<5$

(c) $p:$ 2 adalah bilangan prima; $q: \; 2<4$

Penyelesaian:

(a) $p \wedge q: \; 2+3>5$ dan $5-2=3$ (F)

(b) $p \wedge q: \; -3>-7$ dan $3<5$ (T)

(c) $p \wedge q:$ 2 adalah bilangan prima dan $2<4$ (T)

3. Disjungsi

Disjungsi (*inklusif*) dari pernyataan-pernyataan p dan q adalah pernyataan majemuk "p atau q", yang dilambangkan dengan $p \vee q$. Pernyataan majemuk $p \vee q$ bernilai benar jika salah satu p atau q benar atau kedua-duanya benar. Dalam praktek, kadang-kadang ditulis "*dan/atau*". Sedangkan kata "*atau*" dalam arti *eksklusif* dilambangkan dengan $\underline{\vee}$. Pernyataan majemuk $p \underline{\vee} q$ bernilai benar jika salah satu benar tetapi tidak keduanya p atau q benar. Tabel kebenaran $p \vee q$ dan $p \underline{\vee} q$ disajikan dalam Tabel 1.5.

Tabel 1.5

p	q	$p \vee q$	$p \veebar q$
T	T	T	F
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

Contoh 1.6

Bentuklah disjungsi dari p dan q:

(a) $p: \; 2+3 \neq 5; \quad q: \; 5<3$

(b) p: 2 adalah bilangan prima; q: $\sqrt{2}$ adalah bilangan rasional.

Penyelesaian:

(a) $p \vee q: \; 2+3 \neq 5 \text{ atau } 5<3$ (F)

(b) $p \vee q$: 2 adalah bilangan prima atau $\sqrt{2}$ adalah bilangan rasional (T).

4. Implikasi

Misalkan p dan q adalah pernyataan. Pernyataan majemuk "jika p, maka q", yang dilambangkan dengan $p \Rightarrow q$ disebut *pernyataan bersyarat* atau *implikasi*. Pernyataan p disebut *hipotesis* atau *anteseden* (*antecedent*) dan q disebut *konklusi* atau *konsekuen* (*consequent*). Pernyataan majemuk $p \Rightarrow q$ bernilai salah jika p benar dan q salah. Dalam kemungkinan lainnya, $p \Rightarrow q$ bernilai benar. Tabel kebenaran $p \Rightarrow q$ disajikan dalam Tabel 1.6.

Tabel 1.6

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Contoh 1.7

Tulislah implikasi dari p dan q:

a) p: Saya lapar; q: Saya akan makan

b) p: 2 adalah bilangan prima; q: $2 < 4$

Penyelesaian:

a) Jika saya lapar, maka saya akan makan

b) Jika 2 adalah bilangan prima, maka $2 < 4$.

Dalam matematika (praktek), pernyataan-pernyataan berikut merupakan bentuk yang ekuivalen, artinya jika salah satu benar maka semua yang lain juga benar dan jika salah satu salah, semua yang lain juga salah.

(a) Jika p, maka q.

(b) p mengimplikasi q.

(c) Jika p, q.

(d) p hanya jika q.

(d) q jika p.

(e) p adalah syarat cukup untuk q.

(f) q adalah syarat perlu untuk p.

(g) q bilamana saja p.

5. Biimplikasi (ekuivalensi)

Misalkan p dan q adalah pernyataan. Pernyataan majemuk "p jika dan hanya jika q", yang dilambangkan dengan $p \Leftrightarrow q$ disebut *biimplikasi* atau *ekuivalensi.* Tabel kebenaran $p \Leftrightarrow q$ disajikan dalam Tabel 1.7. Pernyataan majemuk $p \Leftrightarrow q$ bernilai benar jika p dan q keduanya benar atau keduanya salah. Biimplikasi $p \Leftrightarrow q$ juga dinyatakan sebagai p adalah syarat perlu dan cukup untuk q.

Tabel 1.7

p	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Contoh 1.8

Apakah biimplikasi berikut benar?

$3 < 4$ jika dan hanya jika $4 - 3 > 0.$

Penyelesaian:

Misalkan p adalah pernyataan $3 < 4$ dan q adalah pernyataan $4 - 3 > 0$.

Karena p dan q keduanya bernilai benar, maka disimpulkan bahwa $p \Leftrightarrow q$ bernilai benar.

Secara umum, sebuah pernyataan majemuk mungkin mempunyai banyak bagian komponen, masing-masing dari komponen ini merupakan pernyataan yang disajikan dengan variabel-variabel pernyataan. Pernyataan majemuk

$$s: \quad p \Rightarrow (q \vee (p \Rightarrow r))$$

memuat tiga pernyataan p , q dan r, masing-masing pernyataan secara independen bisa bernilai benar atau salah. Secara keseluruhan terdapat $2^3 = 8$ kombinasi yang mungkin dari nilai-nilai untuk p , q dan r , dan tabel kebenaran untuk s harus memberikan nilai benar atau salahnya s dalam semua kasus.

Jika pernyataan majemuk s memuat n pernyataan komponen , maka akan ada 2^n unsur yang diperlukan dalam tabel kebenaran s. Tabel kebenaran ini dapat dikonstruksi secara sistematis dengan langkah-langkah sebagai berikut:

Langkah 1. n kolom pertama dari tabel kebenaran diberi label variabel-variabel pernyataan komponen. Kolom-kolom selanjutnya dikonstruksi untuk semua kombinasi-kombinasi pernyataan berikutnya, dan kolom terakhir untuk pernyataan yang ditanyakan.

Langkah 2. Terhadap masing-masing n bagian atas pertama, kita tulis 2^n kemungkinan kemungkinan (n-*tuple*) nilai-nilai kebenaran dari pernyataan komponen s. Masing-masing n-*tuple* ditulis pada baris terpisah.

Langkah 3. Untuk setiap baris kita memperhitungkan (dalam urutan) semua nilai kebenaran sisanya.

Contoh 1.9

Buatlah tabel kebenaran untuk pernyataan-pernyataan majemuk berikut:

a) $\neg(p \wedge \neg q)$

b) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

Penyelesaian: Tabel kebenaran berikut dikonstruksi menggunakan ketiga langkah di atas.

a) Tabel 1.8

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	F	F

b) Tabel 1.9

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	F	T	F	T
F	T	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T

1.4 Tautologi, Kontradiksi dan Kontingensi

1.4.1 Tautologi

Definisi 1.1

Sebuah pernyataan majemuk disebut **tautologi** jika pernyataan tersebut selalu bernilai benar untuk semua nilai yang mungkin dari pernyataan-pernyataan komponennya.

Contoh 1.10

Menggunakan tabel kebenaran , tunjukkan bahwa pernyataan-pernyataan berikut adalah tautologi.

a) $(p \wedge q) \Rightarrow p$

b) $((p \vee q) \wedge \neg p) \Rightarrow q$

Penyelesaian:

a) Tabel 1.10

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

b) Tabel 1.11

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$(p \vee q) \wedge \neg p$	$((p \vee q) \wedge \neg p) \Rightarrow q$
T	T	T	F	F	T
T	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T

1.4.2 Kontradiksi

Definisi 1.2

Sebuah pernyataan majemuk disebut **kontradiksi** jika pernyataan tersebut selalu bernilai salah untuk semua nilai yang mungkin dari pernyataan-pernyataan komponennya.

Istilah lain dari kontradiksi adalah **mustahil (***absurdity***).**

Contoh 1.11

Menggunakan tabel kebenaran , tunjukkan bahwa pernyataan-pernyataan berikut adalah kontradsiksi.

a) $p \wedge \neg p$

b) $(p \wedge q) \wedge \neg p$.

Penyelesaian:

a) Tabel 1.12

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	F
T	F	F
F	T	F
F	T	F

b) Tabel 1.13

p	q	$p \wedge q$	$\neg p$	$(p \wedge q) \wedge \neg p$
T	T	T	F	F
T	F	F	F	F
F	T	F	T	F
F	F	F	T	F

Negasi dari sebuah tautologi adalah kontradiksi, dan sebaliknya.

1.4.3 Kontingensi

Definisi 1.3

Kontingensi (*contingency*) adalah sebuah pernyataan majemuk yang dapat bernilai benar atau salah, bergantung pada nilai-nilai kebenaran dari variabel-variabel pernyataannya.

Contoh 1.12

Menggunakan tabel kebenaran , tunjukkan bahwa pernyataan-pernyataan berikut adalah kontingensi.

a) $p \Rightarrow (q \wedge p)$

b) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q)$

Penyelesaian:

a) Tabel 1.14

p	q	$q \wedge p$	$p \Rightarrow (q \wedge p)$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	T
F	F	F	T

b) Tabel 1.15

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \vee q$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	T	T
F	F	T	F	F

1.5 Konvers, Kontraposisi dan Invers

Jika $p \Rightarrow q$ adalah sebuah implikasi, maka terdapat beberapa pernyataan yang berhubungan dengan $p \Rightarrow q$, yaitu:

Konvers (*converse*) dari $p \Rightarrow q$ adalah $q \Rightarrow p$;

Kontraposisi/Kontrapositif (*contrapositive*) dari $p \Rightarrow q$ adalah $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$;

Invers (*inverse*) dari $p \Rightarrow q$ adalah $(\neg p) \Rightarrow (\neg q)$.

Contoh 1.13

Tulislah konvers, kontrapositif dan invers dari implikasi-implikasi berikut:

a) x positif $\Rightarrow$ x^2 positif

b) Jika hari hujan, maka saya basah kuyup.

c) $x = 3$ $\Rightarrow$ x bilangan bulat ganjil.

Penyelesaian:

a) *Konvers* : x^2 positif $\Rightarrow$ x positif.

Kontraposisi : x^2 tidak positif $\Rightarrow$ x tidak positif.

Invers : x tidak positif $\Rightarrow$ x^2 tidak positif.

b) *Konvers* : Jika saya basah kuyup, maka hari hujan.

Kontraposisi : Jika saya tidak basah kuyup, maka hari tidak hujan.

Invers : Jika hari tidak hujan, maka saya tidak basah kuyup.

c) *Konvers* : x bilangan bulat ganjil $\Rightarrow$ $x = 3$.

Kontraposisi : x bukan bilangan bulat ganjil $\Rightarrow$ $x \neq 3$

Invers : $x \neq 3$ $\Rightarrow$ x bukan bilangan bulat ganjil.

1.6 Implikasi Logis dan Ekuivalensi Logis

1.6.1 Implikasi Logis

Jika $p \Rightarrow q$ tautologi, maka $p \Rightarrow q$ selalu bernilai benar untuk semua nilai p dan q yang mungkin. Dilambangkan dengan $p \rightarrow q$ dan dibaca "p *implikasi* *logis* q". Artinya $p \rightarrow q$ digunakan apabila pernyataan p selalu mengimplikasi pernyataan q tanpa memperhatikan nilai dari variabel-variabel penyusunnya.

Contoh 1.14

Menggunakan tabel kebenaran, tunjukkan bahwa pernyataan-pernyataan majemuk berikut adalah tautologi :

a) $(p \wedge q) \Rightarrow p$

b) $\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

Penyelesaian:

a) Tabel 1.16

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

Jadi, $(p \wedge q) \rightarrow p$

b) Tabel 1.17

p	q	$\neg p$	$p \Rightarrow q$	$\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Jadi, $\neg p \rightarrow (p \Rightarrow q)$.

1.6.2 *Ekuivalensi Logis*

Definisi 1.4

Dua pernyataan s_1 dan s_2 dikatakan **ekuivalen logis** (**ekuivalen**) dan ditulis $s_1 \leftrightarrow s_2$ (dibaca "s_1 *ekuivalen logis dengan* s_2") atau $s_1 \equiv s_2$ (dibaca "s_1 *ekuivalen dengan* s_2") jika s_1 dan s_2 selalu bernilai sama (artinya $s_1 \Leftrightarrow s_2$ tautologi).

Contoh 1.15

Menggunakan tabel kebenaran, tunjukkan bahwa pernyataan-pernyataan majemuk berikut adalah tautologi :

a) $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$

b) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$.

Penyelesaian:

a) Tabel 1.18

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$	$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
T	F	T	T
T	F	T	T
F	T	F	T
F	T	F	T

Jadi, $\neg(\neg p) \leftrightarrow p$ atau $\neg(\neg p) \equiv p$.

b) Tabel 1.19

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$(\neg p) \vee (\neg q)$	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$
T	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	T	F	T	T	T
F	T	T	F	F	T	T	T
F	F	T	T	F	T	T	T

Jadi, $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$ atau $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$.

Teorema 1.1

Pernyataan-pernyataan $p \Rightarrow q$ dan $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ adalah ekuivalen.

Bukti :

Tabel 1.19 berikut menyajikan tabel kebenaran untuk membandingkan nilai $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ dan nilai $p \Rightarrow q$.

Tabel 1.20

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

Karena kolom 3 dan kolom 6 dari Tabel 1.20 adalah identik, maka disimpulkan bahwa pernyataan-pernyataan $p \Rightarrow q$ dan $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ adalah ekuivalen.

Jadi, kontrapositif dari sebuah implikasi selalu ekuivalen dengan implikasi semula.

Teorema 1.2

Pernyataan-pernyataan $p \Rightarrow q$ dan $(\neg p) \vee q$ adalah ekuivalen.

Bukti:

Tabel 1.21 menyajikan tabel kebenaran untuk membandingkan nilai $(\neg p) \vee q$ (kolom 5) dan nilai $p \Rightarrow q$ (kolom 3).

Tabel 1.21

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$(\neg p) \vee q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Soal-soal Latihan 1

1. Manakah diantara kalimat-kalimat berikut yang termasuk pernyataan?
   a) Apakah 3 sebuah bilangan positif?
   b) $3+5=7$
   c) Pada tahun 2004 Susilo Bambang Yudoyono menjadi presiden RI.
   d) Bukalah pintu itu!
   e) $2x-1=0$.
   f) Jika Romi terlambat ke pesta, maka Yuli akan marah sekali.

2. Tentukan negasi dari pernyataan-pernyataan berikut :
   a) Harga buah apel tidak mahal di Malang.
   b) $3+4 \le 7$
   c) Surabaya adalah kota besar di Indonesia.
   d) Semua mahasiswa rajin belajar.

3. Misalkan p dan q adalah pernyataan-pernyataan

   p : Mobilmu kehabisan bensin.

   q : Kamu tidak dapat mengemudikan mobilmu.

   Tulislah pernyataan-pernyataan berikut menggunakan p dan q dan penghubung logika.
   a) Mobilmu tidak kehabisan bensin.
   b) Kamu tidak dapat mengemudikan mobilmu jika mobilmu kehabisan bensin.
   c) Mobilmu tidak kehabisan bensin jika kamu dapat mengemudikannya.
   d) Jika kamu tidak dapat mengemudikan mobilmu, maka mobilmu kehabisan bensin.

4. Misalkan p, q dan r adalah pernyataan-pernyataan tentang segitiga ABC berikut:

   p : Segitiga ABC samakaki.

   q : Segitiga ABC sama sisi.

   r : Segitiga ABC sama siku-siku.

Terjemahkan dan tentukan nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan majemuk berikut :

a) $p \Rightarrow q$

b) $\neg q \Rightarrow \neg p$

c) $p \wedge \neg q$

d) $r \Rightarrow p$

e) $r \Rightarrow \neg p$.

5. Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan majemuk berikut:
   a) $3 < 4$ dan 4 bilangan bulat positif.
   b) $3 \geq 4$ dan 4 bilangan bulat positif.
   c) $3 < 4$ dan 4 bukan bilangan bulat positif.
   d) $3 \geq 4$ dan 4 bukan bilangan bulat positif.

6. Pilih pernyataan yang merupakan negasi dari pernyataan "3 bilangan genap dan -4 bilangan negatif".
   a) 3 bilangan genap dan -4 bukan bilangan negatif.
   b) 3 bukan bilangan genap atau -4 bukan bilangan negatif.
   c) 3 bukan bilangan genap dan -4 bukan bilangan negatif.
   d) 3 bilangan genap atau -4 bukan bilangan negatif.

7. Tentukan nilai kebenaran dari implikasi-implikasi berikut:
   a) Jika $0{,}3$ bilangan bulat, maka $1 + 0{,}3 = 3$.
   b) Jika manusia dapat terbang, maka $1 + 2 = 3$.
   c) Jika $4 > 2$, maka kuda dapat terbang.
   d) Jika $2x5 = 10$, maka $1 + 3 = 4$.

8. Misalkan p dan q adalah pernyataan-pernyataan primitif sehingga implikasi $p \Rightarrow q$ salah. Tentukan nilai kebenaran untuk
   a) $p \wedge q$
   b) $\neg p \vee q$
   c) $q \Rightarrow p$
   d) $\neg q \Rightarrow \neg p$

9. Konstruksikan tabel kebenaran untuk setiap pernyataan majemuk berikut:
   a) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
   b) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$
   c) $(p \wedge q) \Rightarrow p$
   d) $q \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

10. Nyatakan konvers, kontrapositif dan invers dari implikasi-implikasi berikut:
    a) Jika hari ini hujan, maka saya akan tinggal di rumah.
    b) Jika $2+2=4$, maka $1+2=3$.
    c) Jika $4>2$, maka saya bukan gubernur Jawa Timur.
    d) Jika x bilangan prima, maka x tidak mempunyai pembagi selain 1 dan x sendiri .
    e) Jika saya mempunyai waktu dan saya tidak lelah, maka saya akan ke toko buku.
    f) Jika saya mempunyai cukup uang, maka saya akan membeli mobil dan saya akan membeli rumah.

11. Tentukan nilai kebenaran pernyataan-pernyataan dalam soal (10).

12. Tentukan nilai kebenaran jawaban soal (10).

13. Misalkan p, q dan r adalah pernyataan-pernyataan berikut:

    p: Saya akan belajar matematika.

    q: Saya akan pergi ke toko buku.

    r: Saya dalam keadaan baik.

    Tulislah pernyataan-pernyataan berikut dalam p, q dan r dan penghubung logika.
    a) Jika saya tidak dalam keadaan baik, maka saya akan pergi ke toko buku.
    b) Saya tidak akan pergi ke toko buku dan saya akan belajar matematika.
    c) Saya akan pergi ke toko buku hanya jika saya tidak belajar matematika.
    d) Jika saya tidak belajar matematika, maka saya tidak dalam keadaan baik.

13. Misalkan p, q dan r adalah pernyataan-pernyataan berikut:

    p: Saya akan belajar matematika.

q : Saya akan pergi ke toko buku.

r : Saya dalam keadaan baik.

Tulislah kalimat-kalimat yang berhubungan dengan pernyataan-pernyataan berikut:

a) $\neg p \wedge q$.

b) $r \Rightarrow (p \vee q)$.

c) $\neg r \Rightarrow (\neg q \vee p)$.

d) $(q \wedge \neg p) \Leftrightarrow r$.

14. Tentukan tabel kebenaran dari pernyataan-pernyataan berikut:

a) $(p \vee \neg q) \Rightarrow q$.

b) $q \Rightarrow (q \Rightarrow p)$.

c) $(q \wedge p) \Rightarrow q$.

d) $\neg(p \vee \neg q) \Rightarrow \neg p$

e) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$.

f) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$.

g) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$.

h) $q \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

i) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$.

j) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

15. Pernyataan-pernyataan manakah dalam Soal (14) yang merupakan tautologi, kontradiksi atau kontingensi.

16. Menggunakan tabel kebenaran, tunjukkan bahwa implikasi-implikasi berikut adalah tautologi.

a) $p \Rightarrow (p \vee q)$.

b) $\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg p$.

c) $\neg(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$.

d) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$.

f) $[(p \vee q) \wedge \neg p] \Rightarrow q$.

g) $[\neg q \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow \neg p$.

h) $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$.

i) $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]$

17. Tunjukkan bahwa pernyataan-pernyataan berikut adalah kontradiksi

a) $p \wedge (q \wedge \neg p)$

b) $(\neg p \vee \neg q) \vee p$

c) $p \Leftrightarrow (q \wedge \neg p)$.

d) $[(p \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)] \Leftrightarrow [(\neg p \wedge r) \vee (\neg q \wedge \neg r)]$.

18. Menggunakan tabel kebenaran, tunjukkan bahwa s dan t ekuivalen jika

a) $s: \neg(p \vee q)$ $t: \neg p \wedge \neg q$.

b) $s: \neg(p \Rightarrow q)$ $t: p \wedge \neg q$.

c) $s: p \Rightarrow q$ $t: (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

d) $s: p \Leftrightarrow q$ $t: (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

e) $s: \neg(p \Leftrightarrow q)$ $t: (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$.

19. Menggunakan tabel kebenaran, tunjukkan bahwa s dan t ekuivalen jika

a) $s: \neg[p \vee (q \wedge r)]$ $t: (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r)$

b) $s: p \Rightarrow (q \wedge r)$ $t: (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$.

c) $s: (p \vee q) \Rightarrow r$ $t: (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$.

d) $s: p \Rightarrow (q \vee r)$ $t: \neg r \Rightarrow (p \Rightarrow q)$.

e) $s: (p \wedge q) \Rightarrow r$ $t: \neg(p \wedge q) \vee r)$.

20. Tanpa menggunakan tabel kebenaran, tunjukkan bahwa pernyataan-pernyataan berikut tautologi

a) $p \Rightarrow (p \vee q)$.

b) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$.

c) $\neg(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg q$.