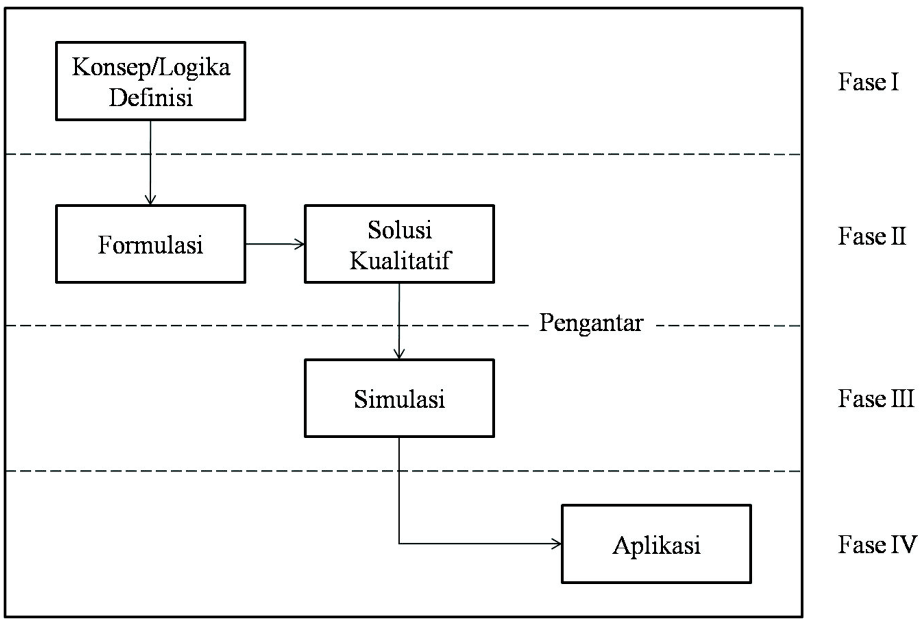
RESUME PEMODELAN MATEMATIKA DALAM BIDANG FISIKA

1. Pendahuluan

Dalam kehidupan nyata terdapat dua macam kejadian, yaitu kejadian deterministik dan kejadian stokastik. Kejadian deterministik adalah kejadian yang pasti terjadi, hanya dipengaruhi oleh kejadian awal tanpa melibatkan variabel random. Sedangkan kejadian stokastik adalah kebolehjadian yang hanya dapat ditentukan distribusi frekuensinya, kejadian awal hanya digunakan untuk menduga kejadian berikutnya yang dipengaruhi oleh variabel random. Suatu kejadian dapat dibawa ke dalam model matematika. Untuk memodelkan kejadian tersebut, perlu dilakukan beberapa fase seperti Gambar 1.

Fase I, yaitu fase penyusunan logika atau konsep dasar, yang dilakukan adalah bagaimana membuat suatu konsep atau logika yang sesuai dengan permasalahan itu. Setelah konsep dibuat, Fase II yaitu tahap memformulasikan model dari masalah yang ingin dibahas. Model matematika yang biasa digunakan adalah



Gambar 1. Fase dalam Pemodelan

model persamaan diferensial, yang kemudian penyelesaiannya dapat diselesaikan dengan solusi persamaan diferensial. Apabila model tidak dapat diselesaikan dengan solusi persamaan diferensial, maka solusi yang dilakukan adalah solusi numerik secara simulasi pada Fase III, yaitu simulasi model dengan grafik. Dalam fase ini simulasi digunakan untuk melihat bagaimana model diinterpretasikan secara grafik. Setelah ketiga fase dilakukan, langkah terakhir, Fase IV adalah penerapan model tersebut ke dalam kehidupan sehari-hari.

2. Model Deterministik

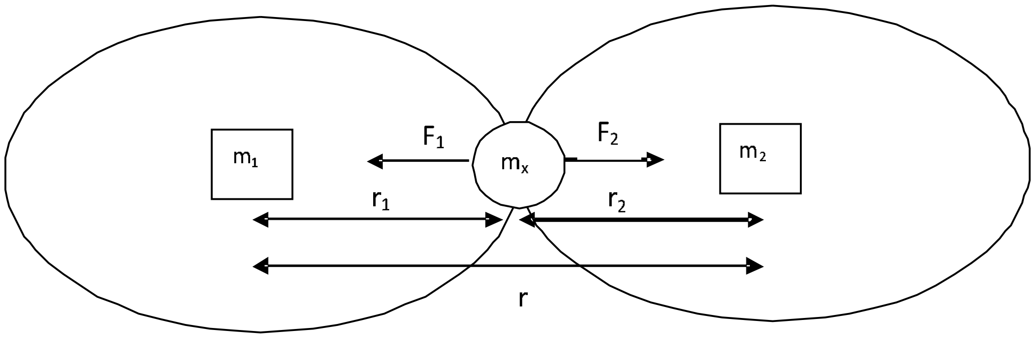
Contoh aplikasi dari kejadian deterministik adalah penentuan tipe supermarket dimana tidak jauh dari lokasi tersebut telah berdiri supermarket lain sebagai kompetitornya. Kompetitor tersebut sudah berdiri dengan berbagai keunggulan dan memiliki pelanggan setia yang bermukim di sekitarnya. Bagaimana cara agar para pelanggan itu tertarik untuk mengunjungi supermarket yang akan dibangun? Langkah-langkah menentukannya

(1) Menentukan variabel yang mempengaruhi ketertarikan pelanggan untuk mengunjungi kompetitor. Variabel tersebut dapat berupa jarak yang terjangkau, tempat yang strategis, *event* yang ada di supermarket tersebut, dan beberapa variabel yang dapat disesuaikan dengan situasi pasar.

(2) Dengan menggunakan konsep gaya dalam fisika kita dapat menganalisis pola penyebaran penduduk dan kemungkinan mereka untuk mengunjungi supermarket tersebut. Rumus gaya yang berlaku adalah

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{2.1}$$

Dari Gambar 2, diketahui m_1 adalah supermarket 1 sedangkan m_2 adalah supermarket 2, m_x merupakan supermarket yang akan dibangun di antara kedua supermarket 1 dan 2. Diasumsikan ketiga supermarket berada dalam satu garis lurus. Jarak supermarket 1 dan supermarket 2 adalah r. Jarak antara supermarket 1 dan supermarket yang akan dibangun dinotasikan dengan r_1, sedangkan jarak antara supermarket 2 dan supermarket yang akan dibangun dinotasikan dengan r_2. Sehingga $r = r_1 + r_2$. Gaya



Gambar 2. Contoh peta persebaran penduduk di persekitaran dua supermarket

tarik pengunjung untuk berbelanja ke supermarket dinotasikan sebagai F.

Ada tiga kemungkinan *output* yaitu

- Jika $F_1 = F_2$ persamaan gaya akan menjadi

$$\begin{aligned}F_1 &= F_2\\ \frac{m_1 m_x}{r_1^2} &= \frac{m_2 m_x}{r_2^2}\\ \frac{m_1}{r_1^2} &= \frac{m_2}{r_2^2}\end{aligned}$$

karena $r = r_1 + r_2$ maka $r_2 = r - r_1$

$$\begin{aligned}\frac{m_1}{r_1^2} &= \frac{m_2}{(r-r_1)^2}\\ m_1(r-r_1)^2 &= m_2 r_1^2\\ \left(\frac{r-r_1}{r_1}\right)^2 &= \frac{m_2}{m_1}\\ \frac{r}{r_1} - 1 &= \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\\ r_1 &= \frac{r}{\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} + 1}\end{aligned}$$

- Jika $F_1 > F_2$ persamaan gaya akan menjadi

$$\begin{aligned}
F_1 &> F_2 \\
\frac{m_1 m_x}{r_1^2} &> \frac{m_2 m_x}{r_2^2} \\
\frac{m_1}{r_1^2} &> \frac{m_2}{r_2^2} \\
\frac{m_1}{r_1^2} &> \frac{m_2}{(r - r_1)^2} \\
m_1(r - r_1)^2 &> m_2 r_1^2 \\
\left(\frac{r - r_1}{r_1}\right)^2 &> \frac{m_2}{m_1} \\
\frac{r}{r_1} - 1 &> \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \\
r_1 &< \frac{r}{\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} + 1}
\end{aligned}$$

- Jika $F_1 < F_2$ persamaan gaya akan menjadi

$$\begin{aligned}
F_1 &< F_2 \\
\frac{m_1 m_x}{r_1^2} &< \frac{m_2 m_x}{r_2^2} \\
\frac{m_1}{r_1^2} &< \frac{m_2}{r_2^2} \\
\frac{m_1}{r_1^2} &< \frac{m_2}{(r - r_1)^2} \\
m_1(r - r_1)^2 &< m_2 r_1^2 \\
\left(\frac{r - r_1}{r_1}\right)^2 &< \frac{m_2}{m_1} \\
\frac{r}{r_1} - 1 &< \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \\
r_1 &> \frac{r}{\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} + 1}
\end{aligned}$$

(3) Mengetahui pola penyebaran penduduk yang bertempat tinggal di persekitaran kedua supermarket. Hal ini dilakukan untuk mendukung langkah kedua. Jika persebaran penduduk diketahui, akan mudah ditentukan variabel-variabel yang di langkah 2.

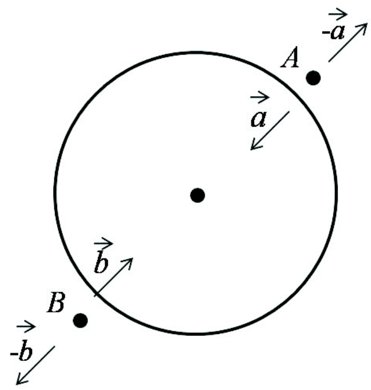
3. Model Stokastik

Satu contoh dari suatu kejadian stokastik yang berhubungan dengan pemodelan matematika adalah sistem inventori di suatu supermarket. Sistem inventori digunakan untuk menentukan jumlah stock barang yang seharusnya tersedia dalam suatu supermarket sehingga supermarket tersebut dapat mengatur banyaknya barang yang didisplay dan disimpan. Kasus ini tidak dapat diselesaikan secara eksak atau deterministik karena penyediaan stock dipengaruhi oleh kebutuhan konsumen yang berubah-ubah dan tidak tetap.

Kasus lain dari proses stokastik yaitu kasus antrian, misalnya mengenai penyediaan secara optimal jumlah kasir dalam suatu supermarket. Kasus ini dimasukkan dalam kasus stokastik karena jumlah kedatangan konsumen tidak sama setiap waktu. Sebagai contoh, pada awal bulan pengunjung yang datang sangat banyak, kadang melebihi dari hari biasa sehingga perlu dibuka banyak kasir sedangkan pada tengah menuju akhir bulan pengunjung yang datang lebih sedikit. Jadi, perlu dilakukan analisis untuk mengetahui perilaku pengunjung. Dalam kasus ini, siklus pengunjung tidak dapat ditentukan dengan merumuskannya ke sebuah fungsi. Akan tetapi hanya dapat menghasilkan suatu distribusi kedatangan. Dari distribusi kedatangan itulah dapat ditentukan banyaknya kasir yang harus buka pada setiap waktunya.

Tabel 1. Distribusi kedatangan pengunjung supermarket dengan lebar interval 5 hari

interval	x	$f(x)$	$xf(x)$
1 - 5	170	0.252976	43.00595
6 - 10	145	0.215774	31.2872
11 - 15	100	0.14881	14.88095
16 - 20	75	0.111607	8.370536
21 - 25	67	0.099702	6.68006
26 - 30	115	0.171131	19.68006
jumlah	672	1	123.9048



Gambar 3. Arah atas dan bawah menurut A dan B

4. Hukum Newton

Munculnya hukum Newton berawal dari suatu kejadian sederhana yang dialami oleh Sir Issac Newton (1643-1727). Yaitu kejadian jatuhnya buah apel dari pohon. Dari kejadian itu kemudian muncul pemikiran dan pertanyaan dari Newton, "Mengapa apel tersebut dapat jatuh? Apa penyebabnya?" Pasti ada suatu hal yang menyebabkannya hal itu terjadi. *Force*, inilah yang dianggap Newton sebagai penyebab apel tersebut jatuh. *Force* ini timbul akibat massa apel dan percepatan ke arah bawah. Jelas jika apel tersebut mempunyai massa, sedangkan percepatan tampak pada gejala semakin cepat apel jatuh ketika semakin dekat jarak apel tersebut dengan tanah.

Lalu, timbul pertanyaan selanjutnya, "Dimanakah bawah itu?" Pertanyaan itu muncul karena bumi berbentuk bola, sehingga arah bawah untuk masing-masing orang yang berada dan tersebar di seluruh muka bumi ini pasti akan berbeda.

Perhatikan bahwa Gambar 3 menunjukan arah bawah dan atas menurut A dan orang B. Bagi A, arah bawah adalah vektor arah a ($\overrightarrow{a}$) dan arah atas adalah negatif vektor $a(-\overrightarrow{a})$. Sedangkan bagi B, arah bawah adalah vektor arah b dan arah atas adalah negatif vektor b. Perhatikan pula bahwa arah bawah bagi A searah dengan arah atas bagi B, begitu juga sebaliknya. Sehingga tidak ada konsistensi mengenai anggapan bawah dan atas. Tapi dalam Gambar 3 menunjukan bahwa arah bawah bagi A dan bagi B menuju ke satu arah yang sama, yaitu pusat bumi. Dari sini disimpulkan bahwa arah jatuh bukan lagi ke bawah tetapi ke arah pusat jatuh atau pusat bumi untuk kejadian jatuh diatas bumi.

Sehingga, secara matematis dapat dituliskan

$$F = ma \tag{4.1}$$

dimana F adalah *force* atau gaya, m adalah *mass* atau massa benda, dan a adalah *accelerate* atau percepatan benda.

Pada kasus jatuhnya apel dari pohon, karena arah percepatan menuju ke pusat bumi, maka percepatannya merupakan percepatan gravitasi bumi yang dinotasikan dengan g. Sehingga persamaan (4.1) menjadi

$$F = mg. \tag{4.2}$$

Karena suatu percepatan merupakan turunan dari suatu kecepatan maka persamaan (4.1) dapat ditulis menjadi

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{4.3}$$

5. Gaya Pegas

Gaya pegas atau dikenal sebagai Hukum Hooke merupakan suatu gaya F yang tergantung dengan elastisitas k dari pegas dan posisi atau letak x massa pegas. Sehingga

$$F = -kx \tag{5.1}$$

dikenal sebagai Hukum Hooke.

Dengan menggunakan Hukum Hooke dan Hukum Newton yang menyatakan bahwa jumlah seluruh gaya yang bekerja pada suatu benda sama dengan nol ($\Sigma F = 0$), maka diperoleh

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{5.2}$$

yang merupakan model matematika sederhana untuk sistem pegas.

Jika suatu sistem pegas dikenai dengan suatu gaya lain yang menghambat atau meredamnya maka persamaan (5.2) menjadi

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0. \tag{5.3}$$

Untuk mencari penyelesaian dari persamaan (5.3) diperoleh dengan mencari akar-akar karakteristiknya. Dengan mensubstitusikan $D = \frac{d}{dt}$ ke persamaan (5.3) sehingga

$$mD^2x + cDx + kx = 0$$

$$(mD^2 + cD + k)x = 0$$

dan akar-akar karakteristiknya adalah

$$D = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}. \tag{5.4}$$

Ada 3 kondisi yang mungkin dari persamaan (5.4), yaitu

(1) *Underdamped Oscillations*

Kondisi ini terjadi jika $c^2 < 4mk$. Berarti persamaan (5.4) menjadi

$$D = \frac{-c}{2m} \pm \omega i,$$

$$\omega = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}.$$

Sehingga penyelesaiannya adalah

$$x = e^{\frac{-ct}{2m}}(a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t) \tag{5.5}$$

(2) *Damped Oscillations*

Kondisi ini terjadi jika $c^2 = 4mk$. Berarti persamaan (5.4) menjadi

$$D = \frac{-c}{2m}.$$

Sehingga penyelesaiannya adalah

$$x = e^{\frac{-ct}{2m}}(a_1 + a_2 t). \tag{5.6}$$

(3) *Overdamped Oscillations*

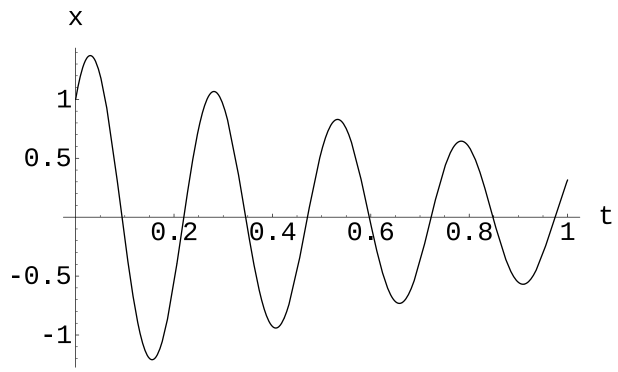
Kondisi ini terjadi jika $c^2 > 4mk$. Berarti persamaan (5.4) menjadi

$$D = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \text{ sehingga}$$

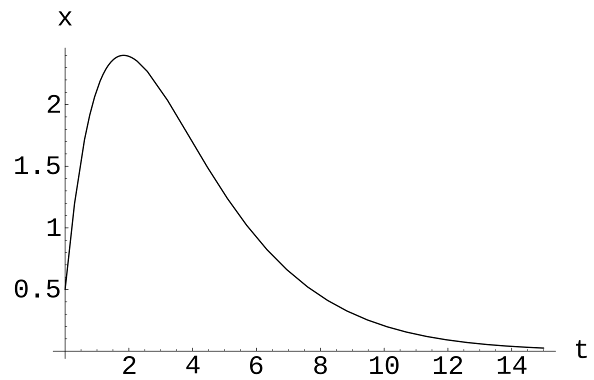
$$D_1 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \text{ dan } D_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

Sehingga penyelesaiannya adalah

$$x = a_1 e^{\frac{-c-\sqrt{c^2-4mk}}{2m}t} + a_2 e^{\frac{-c+\sqrt{c^2-4mk}}{2m}t}. \tag{5.7}$$



Gambar 4. $x = e^{-}t(\cos 25t + \sin 25t)$



Gambar 5. $x = e^{-}0.5t(0.5 + 3t)$

6. Simulasi

Dengan *software* Mathematica 5.2 dapat disimulasikan suatu grafik untuk kasus pegas dengan 3 jenis redaman.

(1) *Underdamped Oscillations*

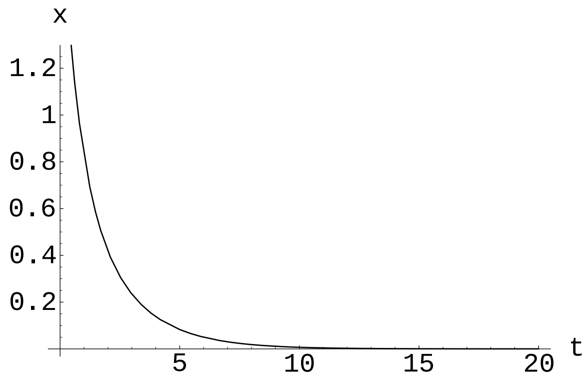
Simulasi untuk kasus *Underdamped Oscillations* dapat dilihat pada Gambar 4.

(2) *Damped Oscillations*

Simulasi untuk kasus *Damped Oscillations* dapat dilihat pada Gambar 5.

(3) *Overdamped Oscillations*

Simulasi untuk kasus *Overdamped Oscillations* dapat dilihat pada Gambar 6.



Gambar 6. $x = e^{-}0.5t + e^{-}1.5t$

7. Aplikasi

Aplikasi dari sistem pegas dapat diterapkan ke dalam kehidupan nyata seperti pembuatan model matematika bangunan tahan gempa.

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, UNS, Jl. Ir. Sutami 36A, Kentingan, Surakarta, 57126