N^o d'ordre : 2405

THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÈ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par SUTANTO

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Sur la Décroissance de la Fonction de Concentration de la Somme de Variables Aléatoires Indépendantes

Soutenue le : 26 Octobre 2001

Aprés avis des rapporteurs :

G. A FREIMAN, Professeur	Université de Tel Aviv
M. IOSIFESCU, Professeur	Académie Roumaine

Devant la commission d'examen formée de :

J. ANTOCH, Professeur	Charles University, Prague	Examinateur
J-M. DESHOUILLERS, Professeur	Université Victor Segalen Bordeaux 2	Directeur
M. IOSIFESCU, Professeur	Acedémie Roumaine	Président
B. LANDREAU, MdC	Université Bordeaux 1	Rapporteur
G. DURRIE, MdC	Université Bordeaux 1	Examinateur
M. OLIVIER, Professeur	Université Bordeaux 1	Examinateur

- 2001-

Remerciements

Je suis heureux de remercier ici tous ceux qui ont joué un rôle dans l'élaboration de cette thése.

Je remercie en premier lieu Jean-Marc DESHOUILLERS qui est à l'origine de cette thése, il m'a apporté tout ceux le soutien et l'aide dont j'ai eu besoin durant ce travail. Il a su faire preuve d'une grande ouverture d'esprit dans les recherces vers lesquelles il m'a orientré. J'ai pu apprécier au cours de nos nombreux entretiens, sa rigueur et sa maîtrise des mathématiques et sa disponibilité. Je suis trés heurex de lui exprimer ici toute ma reconnaissance.

M. le Professeur Gregory A. FREIMAN m'a fait l'honneur de juger ce travail avec attention : je le remercie pour les corrections et les differentes suggestions qu'il a apportées á cette thése.

Je suis heurex de remercier M. le Professeur Marius IOSIFESCU qui a bien voulu examiner ce travail, être rapporteur de cette thése et en présider le jury de soutenance.

M. le Professeur Jaromir ANTOCH a eu la gentillesse d'accepter de faire partie du jury , qu'il en soit remercié.

Je remercié M. Bernard LANDREAU de s'être intéressé à ce travail et d'avoir accepté d'être membre du jury.

M. le Professeur Francesco MOLA a bien voulu être membre de jury; je l'en remercie et regrette qu'il ait dû annuler son deplacement.

M. Gilles DURRIEU a accepté de participier à ce jury, je lui adresse mes plus vifs remerciements.

Je tiens aussi à remercier M. le Professeur Michel OLIVIER qui a aimablement accepté de siéger au sein de ce jury; je lui en exprime ici tous mes remerciements.

Je remercie trés vivements Jean-Marc NAULIN et éFikria CHAOUKI pour avoir maintenu le bon fonctionnement des ordinateurs, et pour ses conseils.

Enfin, je suis heurex de remercier ici toute l'éequipe du laboratoire Sciences et Modélisation de l'Université Victor Segalen Bordeaux 2 au sein de laquelle régne une ambiance trés chaleureuse. Je garderai de trés bons souvenirs de ce laboratoire qui m'a accueilli durant quatre ans et sourtout de nombreux (ses) et sincéres ami(e)s qui m'ont toujours soutenu (Benoit LIQUET, Yoseph AGNAOU, Aisya ZERBET, Mustofa BENDAHMANE).

” Au sommet de toute altitude, voici nos cavaliers qui s’arrêtent face à face avec la verité ”

À mes parents, Siwi rahayu, Gilang Titah Ramadhan, Marie Claire LACOUDANNE et Benoit LIQUET.

" Au sommet de toute altitude, voici nos cavaliers qui s'arrêtent face à face avec la verité "

À mes parents, Siwi rahayu, et Gilang Titah Ramadhan.

Table des Matiéres

Remerciements 2

Table des matiéres 6

Introduction 7

I Résultats Préliminaires 6

1.1 Quelques points de Théorie Additive Inverse 6

1.2 Application du Théorème de Bochner 8

1.3 Esquisse de la Démonstration du Théorème 1 10

II Décroissance de la Fonction de Concentration 12

2.1 Démonstration du Théorème 3 12

2.1.1 Construction de la Loi de $X_1^{(n)}$ 13

2.1.2 Minoration de la Queue de la Distribution de $X_1^{(n)}$ 15

2.1.3 Minoration de la Fonction de Concentration de S_n 17

2.2 Démonstration du Théorème 4 19

BIBLIOGRAPHIE 22

Appendice 24

Introduction

La notion de fonction de concentration a été introduite dans sa célèbre monographie consacrée aux sommes de variables aléatoires. La fonction de concentration est employée pour mesurer la dispersion ou bien la concentration des variables aléatoires, particulièrement lorsqu'elles ne sont pas intégrables. La fonction de concentration $Q(X, L)$ d'une variable aléatoire X est une fonction positive de la variable positive L définie par :

$$Q(X, L) = \sup_{-\infty<t<\infty} P\{t \leq X \leq t + L\}; \text{ pour } L > 0.$$

La fonction de concentration est une fonction bornée et non décroissante par rapport à la variable L. Ses propriétés fondamentales sont les suivantes

(i). Si a est un nombre positif réel alors on a

$$Q(X, aL) \leq \Big([a] + 1\Big)Q(X, L),$$

où $[a]$ est la partie entière de a.

(ii). Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors on a

$$Q(X + Y, L) \leq \min\Big(Q(X, L), Q(Y, L)\Big).$$

Nous considérons maintenant la fonction de concentration de la somme de variables aléatoires. Il est facile de voir que la concentration S_n de n variables aléatoires indepéndantes identiquement distribuées ($i.i.d.$) $X_1, \cdots, X_n$ va être décroissante lorsque n croit. La fonction de concentration tend vers zéro quand n tend vers l'infini pour toute valeur $L > 0$. dès que X_1 n'est pas constante. De nombreux auteurs se sont attachés à étudier ce phénomène (Doeblin, Lévy, Kolmogrov, Rogozin, Esseen, et Kesten). Leurs résultats sont présentés dans la monographie [13] de W. Hengartner and R. Theodorescu.

Premiers résultats sur la vitesse de décroissance

Un résultat très précis est dû à Kesten [14]. Il existe une constante absolue C_1 telle que pour $0 < \lambda \leq 2L$ on ait

$$Q(S_n, L) \leq C_1 \frac{L}{\lambda} \frac{Q(X_1, L)}{\sqrt{n\Big(1 - Q(X_1, \lambda)\Big)}}.$$

Par rapport à n, cette majoration est de l'ordre de grandeur de $n^{-1/2}$.

Dans l'autre direction, on a le résultat de C. G. Esseen [9] (cf. Théorème 4.2 p.299) qui fournit une minoration de la concentration de S_n en fonction des moments de la variable X_1. Pour $0 < r \leq 2$, on pose

$$\mu_r = \inf_{a \in \mathbb{R}} E(|X_1 - a|^r)$$

(qui appartient à $\mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$).

La minorationd'Esseen est

$$Q(S_n, L) \geq K(r) L \Big(L + (n\mu_r(a))^{1/r}\Big)^{-1},$$

où $K(r)$ est donné par :

$$K(r) = \begin{cases} \frac{1}{4}(r+1)^{-\left(1+\frac{1}{r}\right)} & si\, 0 < r < 2 \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} & si\, r = 2. \end{cases}$$

Comme le montre l'example de la loi de Cauchy, la décroissance de la concentration de S_n peut être plus rapide que $n^{-1/2}$. La loi de Cauchy $C(a)$ de paramètre $a > 0$ a pour densité $\frac{a}{\pi(t^2+a^2)}$. Si X_1 a pour loi $C(1)$, alors S_n a pour loi $C(n)$ et donc on a :

$$Q(S_n, 1) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{n\pi}\Big(1 + o(1)\Big).$$

Donc la décroissance est en n^{-1}.

Travaux récents sur la majoration de la concentration de S_n

L'exemple de la loi de Cauchy laisse penser que si X_1 a une queue de distribution importante (c'est-à-dire une décroissance lente $1 - Q(X_1, L)$ quand L tend vers l'infini), alors la concentration de S_n décroît rapidement en n.

Dans cette direction, deux types de majoration ont été démontrés récemment. J-M. deshouillers, G. A. Freiman et A. A. Yudin [4] ont réactualisé le sujet en montrant comment il est possible d'obtenir de tels résultats en combinant le Théorème de Bochner sur la positivité de la transformation de Fourier d'une mesure positive, la théorie additive de nombre et des techniques classiques de Fourier. Le résultat principal est le suivant :

Théorème 1 *Soit* $\frac{\log 4}{\log 3} < \sigma < 2$*; soit* $\varepsilon > 0, A \geq 1, a > 0$ *et* $X_1, \cdots, X_k, \cdots$ *des variables aléatoires á valeur entiéres indépendeantes identiquement distribuées telles que*

$$\forall L \geq A : \; 1 - Q(X_1, L) \geq aL^{-\sigma}, \tag{1}$$

$$\max_{q \geq 2} \max_{s \bmod q} P\{X_1 \equiv s \bmod q\} \leq 1 - \varepsilon. \tag{2}$$

Alors, on a pour $n \geq 1$

$$Q(S_n, 1/2) \leq C_2 n^{-1/\sigma}, \tag{3}$$

où C_2 *est une constante qui ne dépend que de* σ, ε, A *et* a*.*

Ensuite, A. S. Fainleib [10] a considéré le cas où les variables aléatoires ne sont pas nécessairement à valeurs entières et où le membre de droite de (1) est d'un type plus général. Son Corrolaire 1 se lit ainsi :

Théorème 2 *(A. S. Fainleib). Supposons que* H *est une fonction continue croissante sur* $[0, \infty]$ *telle que* $H(0) = 0$ *et*

$$H(4u) \leq 3H(u) \tag{4}$$

dès que u est suffisamment petit. Soit G *la fonction inverse de* H*. Soit* $X_1, \cdots, X_k, \cdots$ *des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées telles que*

$$\forall L \geq A : \; 1 - Q(X_1, L) \geq G(L^{-1}). \tag{5}$$

Alors on a pour $n \geq 1$

$$Q(S_n, 1/2) \leq cH(n^{-1}), \tag{6}$$

où c est constante qui dépend de H, A et de la loi de X_1.

La différence principale entre ces deux résultats est la présence de la condition de nature arithmétique (2) dans le Théorème 1 et le fait que la constante impliquée dans le Théorème 1 ne dépend de la loi de X_1 que par cette condition (2).

La queation que nous abordons dans ce travail est de savoir dans quelle mesure la condition (2), suffisante d'aprés le Théorème 1, est également nécessaire.

Notre premier résultat est de montrer que, dans la formulation uniforme du Théorème 1, la condition (2) est nécessaire.

Théorème 3 *Supposons $0 < \sigma < 2$. Pour $n = 1, 2, \cdots$, il existe une famille de suites de variables aléatoires i.i.d. $X_1^{(n)}, \cdots, X_k^{(n)}, \cdots$ qui satisfait*

$$\forall L \geq 2 : \ 1 - Q(X_1^{(n)}, L) \geq \frac{1}{10} L^{-\sigma}, \tag{7}$$

et

$$n^{1/\sigma} Q(X_1^{(n)} + \cdots + X_n^{(n)}, 1/2) \tag{8}$$

tend vers l'infini avec n.

Les variables aléatoires $X_k^{(n)}$ que nous construisons explicitement prennent des valeurs entières, mais il est clair qu'un lissage (convolution avec une mesure continue très proche de la mesure de Dirac) perment de construire des variables aléatoires continues satisfaisant les conditions du Théorème 3.

les auteurs de [4] suggèrent que des progrès récents de la théorie additive inverse (dans l'esprit du travail [15] de V. Lev) permettent d'étendre à l'àintervalle $]1, 2[$ le domaine des σ pour lesquels le Théorème 1 demeure valable. Notre second résultat est de montrer que la valeur 1 est une borne naturelle pour une telle extension.

Théorème 4 *Supposons que* $0 < \sigma < 1$. *Il existe une famille de suites de des variables aléatoiresé i.i.d.* $X_1^{(n)}, \cdots, X_k^{(n)}, \cdots (n = 1, 2, \cdots)$ *qui satisfait*

$$\forall L \geq 2: \; 1 - Q(X_1^{(n)}, L) \geq \frac{1}{10} L^{-\sigma}, \tag{9}$$

$$\max_{q \geq 2} \max_{s \bmod q} P\{X_1^{(n)} \equiv s \bmod q\} = \frac{1}{2} \tag{10}$$

Alors, on a pour $n \geq 1$

$$n^{1/\sigma} Q(X_1^{(n)} + \cdots + X_n^{(n)}, 1/2) \tag{11}$$

tend vers l'infini avec n.

Dans le premier chapitre, on présente les résultats classiques sur lesquels s'appuient nos démonstrations; on commence par ceux qui concernent la théorie additive inverse puis ceux qui relèvent directement du domaine des fonctions de concentration.

La second chapitre es consacré aux démonstration des Théorème 3 et 4. Enfin, le lecteur trouvera en appendice une version en anglais de ce travail, rédigee dans la forme d'un article, lequel est soumis pour publication.

Chapitre I

Résultats Préliminaires

L'analyse de la preuve du Théorème 1 va nous aider à construire les contre exemples qui établisent le Théorème 3. La structure de Théorème du Freiman nous set utile pour la démonstration du Théorème 4. Nous commençons donc par des points de théorie additive inverse, nous montrons ensuite comment l'analyse de Fourier perment de relier l'étude de la somme de variables aléatoires réelles à la théorie additive et nous esquissons la démonstration du Théorème 1.

1.1 Quelques points de Théorie Additive Inverse

Si A et B sont deux parties d'un monoïde commutatif, on note $A+B$ l'ensemble des sommes $a+b$, où a et b parcourent A et B respectivement.

Il est facile de constater que pour tout ensemble fini d'entiers, E, on a

$$2|E|-1 \leq |E+E| \leq 1/2|E|(|E|+1). \tag{1.1}$$

G. A Freiman a étudié (cf. la synthese qu'il a publiée en [12] la structure de E lorsque $|E+E|$ est petit, c'est-à-dire

$$|E+E| \leq k|E|.$$

Il est facile de voir que si $|E+E| = 2|E|-1$, alors E est une progression arithmétique : en effet, si on écrit $E = \{a_1 < a_2 < \cdots < a_n\}$, alors $E+E$ contient au moins toutes les sommes distincts

$$\{a_1 + a_1, a_1 + a_2, a_2 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_3, \cdots, a_n + a_n\}$$

(cela établit minoration de (1.1) et si E n'est pas une progression arithmétique, il exoste un indice t telque

$$a_{t-1} + a_{t+1} \neq a_t + a_t;$$

dans ce cas $E+E$ contient les deux éléments que nous venons de mentionner, qui sont tous les deux strictement supérieurs à $a_{t-1} + a_t$ et inférieurs à $a_t + a_{t+1}$, et donc $E + E$ contient au moins $2|E|$ éléments.

On peut construire des ensembles E tels que $|E + E|$ soit assez petit en prenant une progression arithmétique et en supprimant quelques termes. Le premier Théorème de Freiman montre que, tant que $|E+E|$ est inférieur strictement à $3|E| - 3$, c'est la seule possibilité; ce théorème s'écrit ainsi :
Si $|E + E| = 2|E| - 1 + t$, avec $0 \leq t \leq |E| - 3$, alors E est inclus dans une progression arithmétique de longueur $|E| + t$.
Ce résultat (étendu comme on le verra à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$) est crucial pour les Théorèmes 1 et 3.

Il est et revanche clair que la borne $3|E| - 3$ est une borne naturalle pour le problème . Soit en effet h et k deux réels supérieurs à 2 avec $k > 2h - 2$ et considérons

$$E = \{1, 2, \cdots, h, k + 1, \cdots, k + h\}.$$

On a

$$E + E = \{2, 3, \cdots, 2h, k + 2, \cdots, k + 2h, 2k + 2, \cdots, 2k + 2h\}$$

qui contient $3 \times (2h - 1) = 3|E| - 3$ éléments. Puisque k peut être arbitrairement grand, il est clair que E n'est pas inclus dans une progression arithmétique courte. Plus généralement, si E remplis assez bien une progression arithmétique généralisée de dimension 2, c'est-à-dire un ensemble de la forme

$$\{a_0 + h_1 a_1 + h_2 a_2 | 0 \leq h_1 \leq H_1, 0 \leq h_2 \leq H_2\},$$

alors $|E+E|$ est inférieur à $4|E|$. Cette observation sous-tend la démonstration du Théorème 4.

Plus généralement , le Théorème de Freiman énonce que la condition $|E+E| < k|E|$ implique que E remplit bien une progression arithmétique généralisée. L'article de yuri Bilu [1] donne une version trés explicite du Théorème de Freiman.

Le Théorème de Freiman admet des extensions à plusieurs autres groupes que $\mathbb{Z}$ et c'est en fait sa généralisation à $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ qui est utile : en effet, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est le groupe dual de $\mathbb{Z}$. En notant par $|E|$ la mesure de Haar d'une partie E de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on a le résultat suivant :

Lemme 1 (Freiman-Moskvin-Yudin) *Supposons $2 < k < 3$, il existe un nombre réel positif μ telle que pour tout ensemble mesurable $E \in \Gamma$ qui est symétrique par rapport à l'origine et satisfait :*

$$|E| \leq \mu \textit{ et } |2E| < k|E|,$$

il existe un entier positif q telle que

$$\bigcup_{r=0}^{q-1} \left[\frac{r}{q} - \frac{|E|}{q}, \frac{r}{q} + \frac{|E|}{q}\right] \subset 3E.$$

1.2 Application du Théorème de Bochner

Le Théorème de Bochner établit le lien entre les fonctions de type positif et les transformées de Fourier de mesures positives. Nous n'avons besoin ici que de l'implication facile, à savoir que la transformée de Fourier d'une mesure de probabilité est une fonction de type positif.

Lemme 2 (Bochner) *Soit φ la transformée de Fourier d'une mesure positive sur $\mathbb{R}$. On a pour tous nombres réel $t_1, \cdots, t_n$ et tous nombres complexes $z_1, \cdots, z_n$:*

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi(t_j - t_k) z_j \bar{z}_k \geq 0.$$

Le lien entre le Théorème de Bochner et la théorie additive provient du résultat suivant.

Lemme 3 *Soit X une variable aléatoire réelle et φ sa fonction caractéristique. Pour $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, on pose*

$$E(\theta) = \{t \in \mathbb{T}; |\varphi(t)| \ge \cos\theta; 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}. \tag{1.2}$$

Si $0 \le \theta_1 + \theta_2 \le \frac{\pi}{2}$, on a

$$E(\theta_1 + \theta_2) \subset E(\theta_1) + E(\theta_2). \tag{1.3}$$

Démonstration

Soit t_1 et t_2 dans $\mathbb{T}$ tels que $|\varphi(t_1)| \ge \cos\theta_1$ et $|\varphi(t_2)| \ge \cos\theta_2$. On applique le Lemme 2 à 3 reprises. Avec $n = 1$ et $z_1 \neq 1$, on déduit $\varphi(0) \ge 0$. Avec $n = 2$ et grâce au critére de Sylvester on a

$$|\varphi(t_1)| \le \varphi(0) \text{ (et de même } |\varphi(t_2)| \le \varphi(0)).$$

Finalement, avec $n = 3$ et en considérant

$$\{t_1, t_2, t_3\} = \{t_1, t_2, t_1 + t_2\},$$

on obtient

$$\begin{vmatrix} \varphi(0) & \varphi(t_1) & \varphi(t_2) \\ \varphi(-t_1) & \varphi(0) & \varphi(t_2 - t_1) \\ \varphi(-t_2) & \varphi(t_1 - t_2) & \varphi(0) \end{vmatrix} \ge 0$$

Le déterminant se réduit à

$$1 - |\varphi(t_2 - t_1)|^2 - |\varphi(t_1)|^2 - |\varphi(t_2)|^2 + 2Re\Big(\varphi(t_1)\varphi(-t_2)\varphi(t_2 - t_1)\Big) \ge 0.$$

De la relation $Re(\ ) \le |\ |$, on déduit

$$1 - |\varphi(t_2 - t_1)|^2 - |\varphi(t_1)|^2 - |\varphi(t_2)|^2 + |\varphi(t_1)||\varphi(-t_2)||\varphi(t_2 - t_1)| \ge 0$$
$$1 - \Big(\varphi(t_2 - t_1) - |\varphi(t_1)||\varphi(t_2)|\Big)^2 + |\varphi(t_1)|^2|\varphi(t_2)|^2 - |\varphi(t_1)|^2 - |\varphi(t_2)|^2 \ge 0;$$

ou bien encore

$$\Big(\varphi(t_2 - t_1) - |\varphi(t_1)||\varphi(t_2)|\Big)^2 \le \Big(1 - |\varphi(t_1)|^2\Big)\Big(1 - |\varphi(t_2)|^2\Big).$$

Comme on a $|\varphi(-t_1| = |\varphi(t_1|$, alors

$$|\varphi(t_2+t_1)| \geq |\varphi(t_1||\varphi(t_2| - \Big(1-|\varphi(t_1)|^2\Big)^{1/2}\Big(1-|\varphi(t_2)|^2\Big)^{1/2}.$$

D'après les conditions sur t_1 et t_2, on en déduit

$$|\varphi(t_1+t_2)| \geq \cos(\theta_1+\theta_2)\text{pour}\,\theta_1+\theta_2 \leq \frac{\pi}{2}; \tag{1.4}$$

car $\Big(1-|\varphi(t)|^2\Big)^{1/2} \leq \sin\theta$.

1.3 Esquisse de la Démonstration du Théorème 1

Nous soulignons ici le rôle clé joué par le Lemme 3 et la théorie additive inverse dans la démonstration du Théorème 1.

En notant φ la fonction caractéristique de X_1, on a

$$Q(S_n, \frac{1}{2}) = \max_k Pr\{S_n = k\} \leq \int_0^1 |\varphi(u)|^n du.$$

Ainsi, si φ n'a que peu de grandes valeurs, $Q(S_n, \frac{1}{2})$ sera petit et le Théorème 1 valide. Il nous faut donc exclure le cas où φ aurait trop de grandes valeurs.

Notons f la fonction inverse de la fonction $\theta \mapsto |E(\theta)|$ (on peut voir la fonction f comme une sorte de réarrangement de la fonction $|\varphi|$). La Figure 1.1 décrit deux types de comportement de la fonction f.

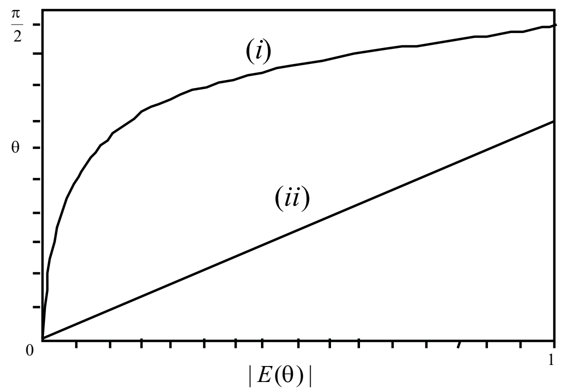

Figure 1.1: Deux exemples de graphe de f

Dans le cas (i), la fonction f est rapidement croissante à l'origine, ce qui implique que $|\varphi|$ n'a pas beaucoup de grandes valeurs et le Théorème 1 est valide.

Dans le cas (ii), on n'a pas une croissance autour de 0 et cela correspond à une majoration de $|E(2\theta)|$ avec un petit facteur multiplicatif. Si l'on suit la preuve du Théorème 1, on voit que si l'on n'est pas dans le cas (i) où l'on sait conclure, c'est que l'on a

$$|E(2\theta)| \leq k|E(\theta)|,$$

pour un certain facteur $k < 3$. La théorie additive inverse perment alors de déduire de cette relation quantitative sur $|E(\theta)|$ une information qualitative sur $E(\theta)$:

- ou bien il y a une intervalle autour de l'origine contenant de grandes valeurs de $|\varphi|$ et alors la variable aléatoire X est presque constante : ce n'est pas compatible avec le fait que X ait une queue de distribution importante.

- ou bien les grandes valeurs de $|\varphi|$ sont situées autour des sommets d'un polygône régulier et alors la variable aléatoire X est presque toute concentrée sur une progression arithmétique : ce n'est pas compatible avec la condition arithmétique imposée à X.

Chapitre II

Décroissance de la Fonction de Concentration

Nous démonstrons les Théorème 3 et 4.

2.1 Démonstration du Théorème 3

Nous donnons dans ce paragraphe un exemple qui permet de montrer que dans le Théorème 1, la condition (2) ne peut pas être éliminée directement. Nous construisons une variables aléatoire $X_1^{(n)}$ qui satisfait une certaine condition arithmétique naturelle et telle que la fonction de concentration de $X_1^{(n)}+\cdots+X_n^{(n)}$ tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini. Nous redonnons ici l'énoncé du Théorème 3.

Théorème 3 *Supposons $0 < \sigma < 2$. Il existe une famille de suites de variables aléatoires i.i.d $X_1^{(n)}, \cdots, X_k^{(n)}, \cdots$ pour $n = 1, 2, \cdots$ qui satisfait*

$$\forall L \geq 2 : \ 1 - Q(X_1^{(n)}, L) \geq \frac{1}{10} L^{-\sigma},$$

et

$$n^{1/\sigma} Q\Big(X_1^{(n)} + \cdots + X_n^{(n)}, \frac{1}{2}\Big)$$

tend vers l'infini avec n.

2.1.1 Construction de la Loi de $X_1^{(n)}$

Soit $\mu^{(1)}$ la mesure de probabilité de la variable aléatoire $X_1^{(1)}$. Le point de départ de notre construction est la mesure de probabilité $\mu^{(1)}$ qui est une mesure positive sur $\mathbb{Z}$ avec la queue $\mu^{(1)}(\mathbb{R}\setminus\ ]-L,L[)$ d'ordre $L^{-\sigma}$. Pour des valeurs $0<\sigma<2$, on définit la mesure de probabilité $\mu^{(1)}$ par les relations suivantes :
Pour $k\in\{-1,0,1\}$

$$\mu^{(1)}(0)=\mu^{(1)}(-1)=\mu^{(1)}(1)=\frac{1}{5}. \tag{2.1}$$

pour $k\geq 2$, on pose

$$\begin{aligned}\mu^{(1)}(k)=\mu^{(1)}(-k)&=w(k,\sigma)\\ &=\frac{1}{5}\int_{k-1}^{k}\sigma x^{-1-\sigma}dx\\ &=\frac{1}{5}\Big(\frac{1}{(k-1)^{\sigma}}-\frac{1}{k^{\sigma}}\Big).\end{aligned} \tag{2.2}$$

On a convenu de noter $\mu^1(k)$ pour $\mu^1(\{k\})$.

On peut remarquer facilement qui $\mu^{(1)}$ est une mesure de probabilité et satisfait

$$\forall L\geq 1:\mu^{(1)}([-L,L])\leq 1-\frac{2}{5}L^{-\sigma}. \tag{2.3}$$

On construit maintenant une mesure de probabilité $\mu^{(n)}$ en éloignant de 0 une partie de la masse de $\mu^{(1)}$ de telle sorte que l'on ne fait qu'accroître la queue de distribution, et $\mu^{(n)}$ satisfera encore (2.3). Afin de profiter de cette construction également dans la démonstration du Théorème 4, on introduit les paramètres δ, r et τ (qui peuvent être choisir explicitement en terme de σ) de telle sorte que

$$0<\sigma<r<\delta<2 \tag{2.4}$$

et τ est un entier positif,

$$\sigma\tau\geq 2 \text{ et } \frac{\delta\sigma\tau}{\delta-\sigma}>1+\frac{1}{r}. \tag{2.5}$$

On pose en outre $K_1=1$ et on définit K_n pour $n\geq 2$ par

$$K_n=\lfloor n^{\tau\sigma/(\delta-\sigma)}\rfloor \tag{2.6}$$

Pour $n \geq 2$, on définit une mesure de probabilité $\mu^{(n)}$ sur $\mathbb{Z}$ de la façon suivante

$$\mu^{(n)}(0) = \mu^{(n)}(n^\tau) = \mu^{(n)}(-n^\tau) = \frac{1}{5}. \tag{2.7}$$

Pour $2 \leq k \leq K_n$, on pose

$$\begin{aligned} \mu^{(n)}(kn^\tau) = \mu^{(n)}(-kn^\tau) &= w(k,\delta) \\ &= \frac{1}{5}\int_{k-1}^{k} \delta x^{-1-\delta} dx \\ &= \frac{1}{5}\Big(\frac{1}{(k-1)^\sigma} - \frac{1}{k^\sigma}\Big); \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} \mu^{(n)}\Big(n^\tau(1+K_n)\Big) &= \mu^{(n)}\Big(- n^\tau(1+K_n)\Big) \\ &= \frac{1}{5}\Big(\frac{1}{k_n^\sigma} - \frac{1}{(n^\tau(1+K_n))}\Big); \end{aligned} \tag{2.9}$$

pour $l > n^\tau(1+K_n)$, on pose

$$\begin{aligned} \mu^{(n)}(-l) = \mu^{(n)}(l) &= w(l,\sigma) \\ &= \frac{1}{5}\int_{l-1}^{l} \sigma x^{-1-\sigma} dx \qquad (2.10) \\ &= \frac{1}{5}\Big(\frac{1}{(l-1)^\sigma} - \frac{1}{l^\sigma}\Big); \qquad (2.11) \end{aligned}$$

et pour les l dans $[-n^\tau(1+K_n), n^\tau(1+K_n)]$ qui ne sont pas multiples de n^τ, on pose

$$\mu^{(n)}(l) = 0. \tag{2.12}$$

Puisque, par la définition (2.6) de K_n, on a $K_n \geq 1$, la mesure $\mu^{(n)}$ est bien définie. Vérifions que c'est bien une mesure de probabilité. On montre d'abord que c'est une mesure positive, ce qui revient à vérifier que le membre de droite de (2.9) est positif ou nul; on a effectivement

$$K_n \leq n^{\tau\sigma/(\delta-\sigma)},$$

d'où

$$\begin{aligned} K_n^\delta \leq n^{\tau\sigma\delta/(\delta-\sigma)} &\leq n^{\tau\sigma} \cdot n^{\tau\sigma^2/(\delta-\sigma)} \\ &< \Big(n^\tau(1+K_n)\Big)^\sigma. \end{aligned}$$

Le second point à vérifier est que la masse totale vaut 1. D'apres (2.7) et (2.8), on obtient alors

$$\begin{aligned}\sum_{|l|\leq nK_n} \mu^{(n)}(l) &= \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\int_1^{K_n} \delta x^{-1-\delta} dx \\ &= 1 - \frac{2}{5K_n^{\delta}},\end{aligned}$$

et d'aprés (2.10), on a

$$\begin{aligned}\sum_{|l|> n(1+K_n)} \mu^{(n)}(l) &= \frac{2}{5}\int_{n^{\tau}(1+K_n)}^{\infty} \sigma x^{-1-\sigma} dx \\ &= \frac{2}{5(n^{\tau}(1+K_n))^{\sigma}},\end{aligned}$$

On a donc, d'après (2.9)

$$\mu^{(n)}(\mathbb{R}) = \sum_{|l|\leq nK_n} \mu^{(n)}(l) + \sum_{|l|> n(1+K_n)} \mu^{(n)}(l) + 2\mu^{(n)}(n^{\tau}(1+K_n)) = 1.$$

2.1.2 Minoration de la Queue de la Distribution de $X_1^{(n)}$

Pour $n = 1, 2, \cdots$ on choisit $X_1^{(n)}, \cdots, X_n^{(n)}$, des variables aléatoires indépendantes dont la loi commune est $\mu^{(n)}$. En se servant de la distribution de $X_1^{(n)}$ qu'on a construite dans le paragraphe précédent, pour prouver (7), il suffit de montrer que pour chaque $L \geq 2$ et chaque intervalle I de longueur L, on a

$$P\{X_1^{(n)} \in I\} \leq 1 - \frac{1}{10}L^{-\sigma}.$$

Soit $L \geq 1$ et I un intervalle fermé de longueur L.

Si I ne contient pas 0 ou si $L \leq 2$, on a

$$P\{X_1^{(n)} \in I\} \leq \frac{4}{5} \leq 1 - \frac{1}{10}L^{-\sigma}.$$

Si I contient 0 et $L > 2$, on pose $I = [a, b]$ et on peut supposer que

$$0 \leq |a| \leq b \leq L,$$

puisque la loi de $X_1^{(n)}$ est paire.

On utilise l'inégalité

$$P\{X_1^{(n)} \in I\} \leq P\{X_1^{(n)} \in [-b, b]\},$$

et on considère 3 cas selon la taille de b.

1. Si $b \geq n^\tau(1+K_n)$, on a

$$P\{X_1^{(n)} \notin [-b,b]\} = 1 - \mu^{(1)}([-b,b])$$

puisque $\mu^{(1)}$ et $\mu^{(n)}$ donnent respectivement les mêmes masses aux points qui sont situées hors de $[-n^\tau(1+K_n), n^\tau(1+K_n)]$. On a donc

$$\begin{aligned} P\{X_1^{(n)} \in [-b,b]\} &= P\{X_1^{(1)} \in [-b,b]\} \\ &= \mu^{(1)}([-b,b]) \\ &= \frac{3}{5} + 2\sum_{2\leq k\leq [b]} \mu^{(1)}(k) \\ &\leq \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\int_1^{[b]} \sigma x^{-1-\sigma} dx \\ &\leq 1 - \frac{1}{10}L^{-\sigma}. \end{aligned}$$

2. Si $b < 2n^\tau$, on a

$$P\{X_1^{(n)} \in [-b,b]\} \leq \frac{3}{5} \leq 1 - \frac{1}{10}L^{-\sigma}.$$

3. Si $2n^\tau \leq b \leq n^\tau(1+K_n)$, on a

$$\begin{aligned} P\{X_1^{(n)} \in [-b,b]\} &\leq \frac{3}{5} + 2\sum_{2\leq k\leq [b/n^\tau]} w(k,\delta) \\ &= 1 - \frac{2}{5}\Big(\Big[\frac{b}{n^\tau}\Big]\Big)^{-\delta}. \end{aligned}$$

On rappelle que $K_n = [n^{\tau\sigma/\delta-\sigma}]$; puisque

$$\frac{b}{n^\tau} < 1 + K_n \leq 2n^{\tau\sigma/\delta-\sigma},$$

on a

$$\begin{aligned} \Big(\frac{b}{n^\tau}\Big)^{(\delta-\sigma)} &\leq (1+K_n)^{\delta-\sigma} \\ &\leq 2^{\delta-\sigma} n^{\tau\sigma} \leq 4^{\tau\sigma}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \Big(\frac{b}{n^\tau}\Big)^{\delta} &\leq 4n^{\tau\sigma}\Big(\frac{b}{n^\tau}\Big)^{\sigma} \\ &< 4b^\sigma \leq 4L^\sigma. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$P\{X_1^{(n)} \in [-b,b]\} \leq 1 - \frac{1}{10}L^{-\sigma}.$$

Tenant compte de 1, 2 et 3 ci-dessous, la condition (7) est prouvée. Il reste maintenant à montrer la relation (8).

2.1.3 Minoration de la Fonction de Concentration de S_n

On montre maintenant la relation (8). Pour montrer que concentration de la somme des $X_k^{(n)}$ est grande, on va utiliser le résultat suivant qui est un corollaire direct du résultat de C. G Esseen mentionné page 10 (cf. [9] ou [13]).

Lemme 4 *Soit* $0 < r < 2$ *et soit* $Y_1, \cdots, Y_n$ *des variables aléatoires i.i.d. On a*

$$Q(Y_1 + \cdots + Y_n, 1/2) \geq \frac{r}{48} \min(2, (nE(|Y_1|^r))^{-\frac{1}{r}}). \tag{2.13}$$

Soit φ_n la fonction caractéristique de $X_1^{(n)}$; en posant $p_h = P\{X_1^{(n)} = h\}$ et $e(u) = exp(2\pi iu)$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\varphi_n(t) &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} p_l e(lt) \\ &= \sum_{|l|\leq K_n} p_{ln^\tau} e(ln^\tau t) + \sum_{|l|>n^\tau K_n} p_l e(lt) \\ &= \psi_n(t) + R_n(t).\end{aligned} \tag{2.14}$$

Lorsque n est assez grand, on a

$$\begin{aligned}|R_n(t)| &\leq \sum_{|l|>n^\tau K_n} \mu^n(l) = \int_{n^\tau K_n}^{\infty} \sigma x^{-1-\sigma} dx \\ &\leq \frac{2}{5}(n^\tau K_n)^{-\sigma} = \frac{2}{5}[n^\tau n^{\sigma/(\delta-\sigma)}]^{-\sigma} \\ &\leq n^{-\frac{\delta\sigma\tau}{(\delta-\sigma)}};\end{aligned}$$

puisque

$$\max(|\varphi_n(t)|, |\psi_n(t)|) \leq 1,$$

on a

$$\begin{aligned}|\varphi_n^n(t) - \psi_n^n(t)| &\leq n|R_n(t)| \\ &\leq n^{\frac{1-\delta\sigma\tau}{\delta-\sigma}}.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Possons

$$q_l = \begin{cases} \frac{1}{1-R(0)} p_{ln^\tau}, & \text{pour } |l| \leq K_n; \\ 0, & \text{pour } |l| > K_n. \end{cases}$$

Puisque

$$\sum_{|l|\leq K_n} q_l = 1,$$

on peut définir une famille de variables aléatoirea i.i.d. $Z_1^{(n)}, \cdots, Z_n^{(n)}$ telles que

$$P\{Z^{(n)} = l\} = q_l,$$

pour tout l dans $\mathbb{Z}$.

Leur fonction caractéristique $\widetilde{\psi_n}$ satisfait

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi_n}(t) &= \sum_{|l|\leq K_n} q_l e(lt) \\ &= \sum_{|l|\leq K_n} \frac{1}{1-R(0)} p_{ln^\tau} e(ln^\tau \frac{t}{n^\tau}) \\ &= \frac{1}{1-R(0)} \psi_n\Big(\frac{t}{n^\tau}\Big).\end{aligned}$$

Par (2.15) et une inégalité similaire reliant $\widetilde{\psi_n}^n$ et ψ_n^n, on a

$$|\varphi_n^n(t) - \widetilde{\psi_n}^n(n^\tau t)| \leq 2n^{\frac{1-\delta\sigma\tau}{\delta-\sigma}}.$$

En inégrant sur $[0,1[$, on a

$$\Big|\int_0^1 \varphi_n^n(t)dt - \int_0^1 \widetilde{\psi_n}^n(n^\tau t)dt\Big| \leq 2n^{\frac{1-\delta\sigma\tau}{\delta-\sigma}};$$

on change de variable dans la second intégrale et on utilise la périodicite de $\widetilde{\psi_n}$; on obtient ainsi

$$\Big|\int_0^1 \varphi_n^n(t)dt - \int_0^1 \widetilde{\psi_n}^n(t)dt\Big| \leq 2n^{\frac{1-\delta\sigma\tau}{\delta-\sigma}};$$

qui est aussi

$$|P\{X_1^{(n)} + \cdots + X_{(n)}^n = 0\}| - P\{Z_1^{(n)} + \cdots + Z_n^{(n)} = 0\} \leq 2n^{\frac{1-\delta\sigma\tau}{\delta-\sigma}}. \tag{2.16}$$

En utilisant la remarque que l'on trouve en haut de la page 10 de [13], l'inégalité (2.16) est équivalent à

$$|Q\{X_1^{(n)} + \cdots + X_{(n)}^n, 1/2\}| - Q\{Z_1^{(n)} + \cdots + Z_n^{(n)}, 1/2\} \leq 2n^{\frac{1-\delta\sigma\tau}{\delta-\sigma}}. \tag{2.17}$$

On rapelle que $r \in]\sigma, \delta[$; on a donc

$$E(|Z^{(n)}|) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} |Z^{(n)}|^r P\{|Z^{(n)}|^r = l\}$$
$$= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \frac{l^r}{1-R(0)} p_{ln^\tau};$$

avec la dééfinition de p_{ln^τ} on a aussi

$$E(|Z^{(n)}|^r) = \frac{l^r}{1-R(0)}\Big(\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\sum_{2\leq l\leq K_n} l^r\Big(\frac{1}{(l-1)^\delta} - \frac{1}{l^\delta}\Big)\Big),$$

qui tend vers une constante $K_1(\sigma)$ quand n tend vers l'infini. En utilisant le lemme d'Essen (lemme 4), il existe une constante $K_2(\sigma)$ telle que pour tout n on a

$$Q(Z_1^{(n)} + \cdots + Z_n^{(n)}, 1/2) \geq K_2(\sigma) n^{-1/r}. \tag{2.18}$$

La relation (8) provient alors de (2.17) et (2.18) grâce à (2.5). Le Théorème 3 est alors démontré.

2.2 Démonstration du Théorème 4

Dans ce paragraphe on montre la nécessité de la condition(2) dans le Théorème 1. Dans cette partie, les variables $X_k^{(n)}$ conserve la signification qu'elles avaient dans la partie précédente. Pour éviter toute confusion, nous réécrivons le Théorème 4 de la façon suivante.

Théorème 4 *Supposons que* $0 < \sigma < 1$. *Il existe une famille de suites de variables aléatoires i.i.d* $Y_1^{(n)}, \cdots, Y_k^{(n)}, \cdots (n = 1, 2, \cdots)$ *qui satisfait*

$$\forall L \geq 2: \; 1 - Q(Y_1^{(n)}, L) \geq \frac{1}{10} L^{-\sigma},$$

$$\max_{q\geq 2} \max(s \bmod q) P\{Y_1^{(n)} \equiv s \bmod q\} = \frac{1}{2}$$

et

$$n^{1/\sigma} Q(Y_1^{(n)} + \cdots + Y_n^{(n)}, 1/2)$$

tend vers l'infini avec n.

Dans ce paragraphe on suppose $0 < \sigma < 1$ et on choisit des paramètres δ, r et τ (avec τ entier) satisfaisant la condition (2.5), ainsi que la condition

$$0 < \sigma < \frac{2\sigma}{2-\sigma} < r < \delta < 2, \tag{2.19}$$

qui est plus forte que (2.4).

Soit $Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)}, \cdots, Y_n^{(n)}$ des variables aléatoires *i.i.d.* qui satisfont

$$P\{Y_k^{(n)} = l\} = \frac{1}{2}P\{X_k^{(n)} = l\} + \frac{1}{2}P\{X_k^{(n)} = l-1\}. \tag{2.20}$$

Soit $L \geq 2$ donné et soit I un intervalle fermé de longueur L tel que

$$Q(Y_1^{(n)}, L) = P(Y_1^{(n)} \in I).$$

On a

$$\begin{aligned} Q(Y_1^{(n)}, L) &= \frac{1}{2}P\{X_1^{(n)} \in I\} + \frac{1}{2}P\{X_1^{(n)} \in I+1\} \\ &\leq \frac{1}{2}Q(X_1^{(n)}, L) + \frac{1}{2}Q(X_1^{(n)}, L) \\ &\leq Q(X_1^{(n)}, L); \end{aligned} \tag{2.21}$$

et donc (9) provient de (1).

Soit $q \geq 2$; pour tout s on a

$$P\{Y_k^{(n)} \equiv s \mod q\} = \frac{1}{2}P\{X_k^{(n)} \equiv s \mod q\} + \frac{1}{2}P\{X_k^{(n)} \equiv s-1 \mod q\}$$

puisque les ensembles $\{X_k^{(n)} \equiv s \mod q\}$ et $\{X_k^{(n)} \equiv s-1 \mod q\}$ sont disjoints, on a

$$P\{Y_k^{(n)} \equiv s \mod q\} \leq \frac{1}{2},$$

et l'égalite est manisfestement obtenue pour $q = 2$, ce qui implique (10).

On considère enfin la concentration de $Y_1^{(n)} + \cdots + Y_n^{(n)}$. On a le lemme suivant

Lemme 5 *Soit $k \in \mathbb{Z}$, $\epsilon_j = \{0,1\}$ pour $j = 1, 2, \cdots, n$ on a*

$$P\{Y_1^{(n)} + \cdots + Y_n^{(n)} = k\} = \frac{1}{2^n} \sum_{(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n) \in \{0,1\}^n} P\{X_1^{(n)} + \cdots + X_n^{(n)} = k \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i\}. \tag{2.22}$$

Une façon deémontrer cette relation est d'introduire une famille de variables aléatoires *i.i.d.* $U_j^{(n)}$ à valeurs dans $\mathbb{Z} \times \{0,1\}$ telle que

$$P\{U_1^{(n)} = (\ell, \epsilon)\} = \frac{1}{2} P\{X_1^{(n)} = \ell\} \text{pour} \epsilon = 0, 1, \tag{2.23}$$

et de considérer $Y_j^{(n)}$ comme la somme des composantes des $U_j^{(n)}$ où $j = 1, \cdots, n$.

Considérons alors (2.22) avec $k = [n/2]$. On obtient donc

$$\begin{aligned} P\{Y_1^{(n)} + \cdots + Y_n^{(n)} = [n/2]\} &\geq \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n) \in \{0,1\}^n \\ \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n = [n/2]}} P\{X_1^{(n)} + \cdots + X_n^{(n)} = 0\} \\ &\geq \binom{n}{[n/2]} \frac{1}{2^n} P\{X_1^{(n)} + \cdots + X_n^{(n)} = 0\}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Des résultats de (2.1), il résulte qu'il existe une constante K_3 telle que

$$P\{X_1^{(n)} + \cdots + X_n^{(n)} = 0\} \geq K_3 n^{-1/r} \text{ pour } n \geq 1$$

et en utilisant la formule de Stirling, l'inégalité (2.24) devient :

$$P\{Y_1^{(n)} + \cdots + Y_n^{(n)}, \frac{1}{2}\} \geq K_4 n^{-\frac{1}{r} - \frac{1}{2}}.$$

Puisque l'on a choisi $r > \frac{2\sigma}{2-\sigma} > \sigma$, la valeur de l'exposant $-\frac{1}{r} - \frac{1}{2}$ est plus grande que $-\frac{1}{\sigma}$. On conclut que

$$n^{\frac{1}{\sigma}} Q(Y_1^{(n)} + \cdots + Y_n^{(n)}, 1/2)$$

tend vers l'infini lorsque n tends ver l'infini. Donc le Théorème 4 est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. Bilu, Structure of set with small sumset, Astérique **258**, 77–108,(1999).

[2] J. W. S. Cassels, *An introduction to the geometry of numbers*, Springer-Verlag, 1959.

[3] J-M. Deshouillers, On some connections between probability and number theory, Contemporary Mathematics **210**, 265–273, (1998).

[4] J-M. Deshouillers, G. A. Freiman and A. A. Yudin, On bounds for the concentration functions 1, IHÉS, Preprint **8014**, 16p,(1995). It has appeared under a slightly modified form in Astérisque, 258, 425-436, (1999).

[5] J. E. A. Dunnage, Inequalities for the concentration function of sums of independent random variables, Proc. London Math. Soc **23**, 489–515,(1971).

[6] P. D. T. A. Elliott, *Probabilistic number theory I : Mean value theorem*, Grundlehren de Mathematischen Wissenschaften no. **239**, (1979).

[7] C. G. Esseen, Fourier analysis of distribution functions, Acta Math **77**, 1–125, (1945).

[8] C. G. Esseen, On the kolmogrov-rogozin inequality for the concentration function, Z. Wahrsch. Verw. und Gebiete **5**, 210–216, (1966).

[9] C. G. Esseen, On the concentration function of a sum of independent random variables, Z. Wahrsch. Verw. und Gebiete **9**, 290–308, (1968).

[10] A. S. Fainleib, On small values of semi-additive function, J. Th. Proba **11**, 609–619, (1998).

[11] W. Feller, *An introduction to probability theory and its application*, Wiley, New York **9** (1966).

[12] G. A. Freiman, What is the structure of K if $K + K$ is small, Lecture Notes on Mathematics, Springer-Verlag, New York **1240**, 109–134, (1987).

[13] W. Hengartner and R. Theodorescu, *Concentration functions*, Academic Press, New York, 1973.

[14] H. Kesten, A sharper form of the doeblin-lévy-kolmogrov-rogozin inéqualité for concentration functions, Math. Scand **25** , 133–144, (1969).

[15] V. F. Lev, Structure theorem for multiple addition and the fobenius problem, J. Nb. Th., 79–88, (1996).

[16] H. B. Mann, *The addition theorems of group theory and number theory*, Interscience **18**, J. Willey, New York, 1965.

[17] V. V. Petrov, *Limit theorems of probability theory : Sequences of independent random variables*, Clarendon Press, Oxford, 1995.

[18] L. P. Postnikova and A. A. Yudin, On the concentration function, Th. Probability Appl **25** (1977).

[19] B. A. Rogozin, On the increase of dispersion of sums of independent random variables, Th. Probability Appl **6**, 97–98, (1961).

[20] Y. G. Sinai, Probability theory : An introductory course, Springer Verlag, New York, 1992.

Appendice

Dans cette partie nous donnons une version en anglais de ce travail, rédigée dans la forme d'un article, lequel est soumis pour publication.

[1] [2] [3] [9] [7] [8] [10] [11] [4] [12] [13] [5] [14] [15] [15] [16] [6] [17] [18] [19] [20]

On the Rate of Decay of the Consentration Function of the Sum of Independent Random Variables

Abstract

We build examples showing the rate of decay of the concentration function of the sum of *i.i.d.* real random variables depends not only on the weight of the tail but also on some condition of a more arithmetical nature.

1 **Introduction**

In order to get a measure of the dispersion (or the concentration) of real random variables, even when it is not integrable, P. Lévy introduced the notion of concentration :

$$Q(X, \lambda) = \sup_t P\{t \leq X \leq t + \lambda\}.$$

It is quite natural to expect that concentration of the sum S_n of n *i.i.d.* random variables with the same law as X will decrease as n is increasing and tend to zero as n goes to infinity, as soon as X is not almost surely constant. This was indeed proved by P. Lévy. The monograph by W. Hengartner and R. Theodorescu gives many explicit results of this type, due mainly to Doeblin, Lévy, Kolmogorov, Rogozin, Esseen, Kesten. One of the features of these delicate upper bounds, is that, on the n aspect, the rate of decay of the concentration of S_n is majorized by $n^{-1/2}$.

However, if one considers independent random variables following a Cauchy law, one readily sees that in this case, the rate of decay of the concentration of S_n has the speed n^{-1}. The only result in [4] connecting the concentration of S_n with a rate of decay quicker than $n^{-1/2}$ is a lower bound due to Essen (cf. Theorem 2.3.2 p.74), a corollary of which is quoted below as Lemma 1.

The question of the upper bound has recently attracted the attention of a few authors, J-M. Deshouillers, G. A. Freimen and A. A. Yudin [1] revived the subject by showing how one could get such results by combining Bochner theorem on the positivity of the Fourier transform of a positive measure, additive number theory and classical Fourier techniques. The main result is the following.

Theorem 1. *(Deshouillers, Freiman, Yudin). Let* $\frac{\log 4}{\log 3} < \sigma < 2$*, let* $\varepsilon > 0$*,* $A \geq 1$*,* $a > 0$ *and let* $X_1, \ldots, X_k, \ldots$ *be i.i.d. integral valued random variables such that :*

$$\forall L \geq A: \; 1 - Q(X_1, L) \geq aL^{-\sigma}. \tag{1}$$

$$\max_{q \geq 2} \max_{s \bmod q} P\{X_1 \equiv s \bmod q\} \leq 1 - \varepsilon. \tag{2}$$

Then we have for $n \geq 1$

$$Q(X_1 + \ldots + X_n, 1/2) \leq cn^{-1/\sigma}, \tag{3}$$

where c *is a constant that depends on* σ, ε, A *and* a *at most.*

Subsequently, A. S. Fainleib [3] considered the case when the random variables are not necessarily integral valued and the right hand side of (1) is of a more general type. His Corollary 1 is read as follows.

Theorem 2. *(A. S. Fainleib). Let* H *be an increasing continous function on* $[0, \infty)$ *such that* $H(0) = 0$ *and*

$$H(4u) \leq 3H(u) \tag{4}$$

for u *sufficiently small. Let* G *be its inverse function and let* $X_1, \ldots, X_k, \ldots$ *be i.i.d. real valued random variables such that*

$$\forall L \geq A: \; 1 - Q(X_1, L) \geq G(L^{-1}). \tag{5}$$

Then we have for $n \geq 1$

$$Q(X_1 + \ldots + X_n, 1/2) \leq cH(n^{-1}), \tag{6}$$

where c *is a constant that depends on* H, A *and the law of* X_1*.*

The comment that follows the statement of Corollary 1 in [3], which is, up to a necessary change in notation "Deshouillers *et al.* considered the last statement for the particular case in which X_i are integral valued and satisfy a certain arithmetical condition and $H(x) = bx^{\beta/2}, b > 0, 1 < \beta < \log_2 3$" seems to miss one point that was addressed to in Theorem 1 : on which property of X_1 does the constant in (6) depend ? The answer is that, besides the large tail property (1) (or equivalently (4)), the random variable X_1 should not be essentially concentrated on an arithmetic progression, as asserted in (2).

Our first aim in this paper is to show that, in the uniform phrasing of Theorem 1, the condition (2) cannot be simply ruled out.

Theorem 3. *Let $0 < \sigma < 2$. There exists a family of i.i.d. integral valued random variables $X_1^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}, (n = 1, 2, \ldots)$, satisfying*

$$\forall L \geq 2 : 1 - Q(X_1^{(n)}, L) \geq \frac{1}{10} L^{-\sigma}, \tag{7}$$

and

$$n^{1/\sigma} Q(X_1^{(n)} + \ldots + X_n^{(n)}, 1/2) \tag{8}$$

tends to infinity with n.

Although we shall construct the random variables $X_k^{(n)}$ with integral values, it is clear that a little smoothing permits to show that one may request that the support of the law of the random variables satisfying Theorem 3 is actually $\mathbb{R}$.

The authors of [1] suggest that further progress in the inverse additive theory on the torus, in the spirit of the work [5] of V. Lev would permit to extend the range of σ in Theorem 1 to the interval $]1, 2[$. Our second aim is to show that 1 is a natural bound for Theorem 1, by showing the following

Theorem 4. *Let $0 < \sigma < 1$. There exists a family of i.i.d. integral valued random variables $X_1^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}, (n = 1, 2, \ldots)$, satisfying*

$$\forall L \geq 2 : 1 - Q(X_1^{(n)}, L) \geq \frac{1}{10} L^{-\sigma}, \tag{9}$$

$$\max_{q \geq 2} \max_{s \bmod q} P\{X_1 \equiv s \bmod q\} = \frac{1}{2} \tag{10}$$

and

$$n^{1/\sigma} Q(X_1^{(n)} + \ldots + X_n^{(n)}, 1/2) \tag{11}$$

tends to infinity with n.

2 Proof of Theorem 3

2.1 The starting point of our construction is a probability measure $\mu^{(1)}$ with a tail $\mu^{(1)}(\mathbb{R} \setminus] -L, L[)$ of the order $L^{-\sigma}$. For $0 < \sigma < 2$, we define the probability measure $\mu^{(1)}$ by the relations

$$\mu^{(1)}(0) = \mu^{(1)}(-1) = \mu^{(1)}(1) = 1/5 \tag{12}$$

and, for $k \geq 2$

$$\mu^{(1)}(k) = \mu^{(1)}(-k) = w(k,\sigma) = \frac{1}{5}\int_{k-1}^{k} \sigma x^{-1-\sigma} dx = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{(k-1)^{\sigma}} - \frac{1}{k^{\sigma}}\right). \quad (13)$$

It is easily seen that $\mu^{(1)}$ is a probability measure and satisfies

$$\forall L \geq 1 : \mu^{(1)}([-L, L]) \leq 1 - \frac{2}{5}L^{-\sigma} \quad (14)$$

We shall now construct the probability measure $\mu^{(n)}$ by pushing some masses of $\mu^{(1)}$ apart from 0, so that we only increase the size of its tail, and (14) will still be satisfied by $\mu^{(n)}$. In order to benefit from this construction also in the proof of Theorem 4, we introduce further parameters δ, r and τ (which can be explicitly chosen in term of σ) such that

$$0 < \sigma < r < \delta < 2 \quad (15)$$

τ is a positive integer and

$$\sigma\tau \geq 2 \text{ and } \delta\sigma\tau/(\delta - \sigma) > 1 + 1/r. \quad (16)$$

We further let $K_1 = 1$ and define K_n for $n \geq 2$ by

$$K_n = \lfloor n^{\tau\sigma/(\delta-\sigma)} \rfloor. \quad (17)$$

For $n \geq 2$ we define the probability measure $\mu^{(n)}$ in the following way

$$\mu^{(n)}(0) = \mu^{(n)}(-n^{\tau}) = \mu^{(n)}(n^{\tau}) = \frac{1}{5}; \quad (18)$$

for $2 \leq k \leq K_n$, we let

$$\mu^{(n)}(kn) = \mu^{(n)}(-kn) = w(k,\delta) = \frac{1}{5}\int_{k-1}^{k} \delta x^{-1-\delta} dx; \quad (19)$$

$$\mu^{(n)}(n^{\tau}(1+K_n)) = \mu^{(n)}(-n^{\tau}(1+K_n)) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{K_n^{\delta}} - \frac{1}{(n^{\tau}(1+K_n))^{\delta}}\right); \quad (20)$$

for $l > n^{\tau}(1+K_n)$, we let

$$\mu^{(n)}(-l) = \mu^{(n)}(l) = w(l,\delta) = \frac{1}{5}\int_{l-1}^{l} \sigma x^{-1-\sigma} dx, \quad (21)$$

and for those l's in $[-n^{\tau}(1+K_n), n^{\tau}(1+K_n)]$ which are not multiple of n^{τ}, we let $\mu^{(n)}(l) = 0$.

Since, by the definition (17) of K_n we have $K_n \geq 1$, the measure $\mu^{(n)}$ is well defined. Let us verify that it is a probability measure. We first show that it is a positive measure, which amounts to checking that the RHS of (20) is non-negative: we have indeed

$$K_n \leq n^{\tau\sigma/(\delta-\sigma)},$$

whence

$$K_n^\delta \leq n^{\tau\sigma\delta/(\delta-\sigma)} \leq n^{\tau\sigma}.n^{\tau\sigma^2/(\delta-\sigma)} < (n^\tau(1+K_n))^\sigma.$$

The second point to check is that the total mass is 1; we have

$$\mu^{(n)}(\mathbb{R}) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\int_1^{K_n} \delta x^{-1-\delta} dx + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{K_n^\delta} - \frac{1}{(n^\tau(1+K_n))^\delta}\right) + \frac{2}{5}\int_{n^\tau(1+K_n)}^\infty \sigma x^{-1-\delta} dx,$$

which is readily seen to be equal to 1.

2.2 For $n = 1, 2, \ldots$, let $X_1^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}$, be independent random variables, the common law of which is $\mu^{(n)}$. We prove here that they satisfy (7). Let $L \geq 1$ and I be closed interval with length L.

If I does not contain 0, or if $L \leq 2$, we have

$$P\{X_1^{(n)} \in I\} \leq \frac{4}{5} \leq 1 - \frac{1}{5}L^{-\sigma}.$$

If I contains 0 and $L > 2$, we let $I = [a, b]$ and we can assume that $0 \leq |a| \leq b \leq L$, since the distribution of $X_1^{(n)}$ is even.

We shall use $P\{X_1^{(n)} \in I\} \leq P\{X_1^{(n)} \in [-b, b]\}$ and consider 3 cases according to the size of b.

(1) If $b \geq n^\tau(1+K_n)$, we have

$$P\{X_1^{(n)} \notin [-b, b]\} = 1 - \mu^{(1)}([-b, b])$$

since $\mu^{(1)}$ and $\mu^{(n)}$ respectively give the same masses to points which are outside $[-n^\tau(1+K_n), n^\tau(1+k_n)]$. We thus have

$$\begin{aligned} P\{X_1^{(n)} \in [-b, b]\} &= P\{X_1^{(1)} \in [-b, b]\} \\ &= \frac{3}{5} + 2\sum_{2 \leq k \leq [b]} \mu^{(1)}(k) \\ &\leq \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\int_1^{[b]} \sigma x^{-1-\sigma} dx \\ &\leq 1 - \frac{1}{10}L^{-\sigma}. \end{aligned}$$

(2) If $b < 2n^\tau$, we have

$$P\{X_1^{(n)} \in [-b, b]\} \leq \frac{3}{5} \leq 1 - \frac{1}{10}L^{-\sigma}.$$

(3) If $2n^\tau \leq b \leq n^\tau(1 + K_n)$, we have

$$P\{X_1^{(n)} \in [-b, b]\} \leq \frac{3}{5} + 2 \sum_{2 \leq k \leq [b/n^\tau]} w(k, \delta)$$
$$= 1 - \frac{2}{5}\left(\left[\frac{b}{n^\tau}\right]\right)^{-\delta}.$$

Since $b/n^\tau < 1 + K_n \leq 2n^{\tau\sigma/(\delta-\sigma)}$, we have

$$(b/n^\tau)^{(\delta-\sigma)} \leq 2^{(\delta-\sigma)} n^{\tau\sigma} \leq 4^{\tau\sigma},$$

whence

$$(b/n^\tau)^\delta \leq 4n^{\tau\sigma}(b/n^\tau)^\sigma \leq 4b^\sigma \leq 4L^\sigma$$

from which we get

$$P\{X_1^{(n)} \in [-b, b]\} \leq 1 - \frac{1}{10}L^{-\sigma}.$$

This proves (7).

2.3 We now prove Relation (8). In order to show that he concentration of the sum of the $X_k^{(n)}$ is large, we'll make use of the following result, which is a direct corollary of a result of C. G. Esseen (cf. [2] or [4])

Lemma 1. *Let $0 < r < 2$ and let $Y_1, \ldots, Y_n$ be i.i.d. random variables. We have*

$$Q(Y_1 + \ldots + Y_N, 1/2) \geq \frac{r}{48} \min(2, (nE(|Y_1|^r))^{-1/r}). \tag{22}$$

Let φ_n be the characteristic function of $X_1^{(n)}$; letting $p_h = P\{X_1^{(n)} = h\}$ and $e(u) = \exp(2\pi i u)$, we can write

$$\varphi_n(t) = \sum_{|l| \leq K_n} p_{ln^\tau} e(\ln^\tau t) + \sum_{|l| > n^\tau K_n} p_l e(lt) = \psi_n(t) + R_n(t), \tag{23}$$

When n is large enough, we have

$$|R_n(t)| \leq \frac{2}{5}K_n^{-\delta} = \frac{2}{5}[n^{\tau\delta/(\delta-\sigma)}]^{-\delta} \leq n^{-\delta\tau\sigma/(\delta-\sigma)};$$

since $\max(|\psi_n(t)|, |\varphi_n(t)|) \leq 1$, we have

$$|\varphi_n^n(t) - \psi_n^n(t)| \leq n|R_n(t)| \leq n^{1-\delta\tau\sigma/(\delta-\sigma)}. \tag{24}$$

Let us define

$$q_l = \begin{cases} \frac{1}{1-R(0)} p_{ln^\tau} & \text{pour } |l| \le K_n; \\ 0 & \text{pour } |l| > K_n; \end{cases}.$$

since $\sum_{|l|\le K_n} q_l = 1$, we can define a family of *i.i.d.* random variable $Z_1^{(n)}, \dots, Z_n^{(n)}$ such that $P\{Z_1^{(n)} = l\} = q_l$ for any l in $\mathbb{Z}$. Their characteristic function $\widetilde{\psi_n}$ satisfies

$$\widetilde{\psi_n}(t) = \sum_{|l|\le K_n} q_l e(lt) = \frac{1}{1-R(0)} \psi_n\left(\frac{t}{n}\right).$$

By (24) and a similar inequality connecting $\widetilde{\psi_n}^n$ and ψ_n^n, we have

$$|\varphi_n^n(t) - \widetilde{\psi_n}^n(n^\tau t)| \le 2n^{1-\delta\tau\sigma/(\delta-\sigma)}.$$

By integrating over $[0,1[$, we get

$$\left| \int_0^1 \varphi_n^n(t)dt - \int_0^1 \widetilde{\psi_n}^n(n^\tau t)dt \right| \le 2n^{1-\delta\tau\sigma/(\delta-\sigma)};$$

we change the variable in the second integral and use the periodicity of $\widetilde{\psi_n}$; we thus obtain

$$\left| \int_0^1 \varphi_n^n(t)dt - \int_0^1 \widetilde{\psi_n}^n(t)dt \right| \le 2n^{1-\delta\tau\sigma/(\delta-\sigma)};$$

which is also

$$|P\{X_1^{(n)} + \ldots + X_n^{(n)} = 0\} - P\{Z_1^{(n)} + \ldots + Z_n^{(n)} = 0\}| \le 2n^{1-\delta\tau\sigma/(\delta-\sigma)}, \quad (25)$$

By the remark at the top of p.10 of [4], (25) is equivalent to

$$|Q(X_1^{(n)} + \ldots + X_n^{(n)}, 1/2) - Q(Z_1^{(n)} + \ldots + Z_n^{(n)}, 1/2)| \le 2n^{1-\delta\tau\sigma/(\delta-\sigma)} \quad (26)$$

We recall that $r \in]\sigma, \delta[$; thus

$$E(|Z^{(n)}|^r) = (1-R(0))^{-1}\left(\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\sum_{2\le l\le K_n} l^r\left(\frac{1}{(l-1)^\delta} - \frac{1}{l^\delta}\right)\right),$$

tends to a constant C_1 as n tends to infinity. By Esseen's Lemma 1, there exists a constant C_2 such that for all n we have

$$Q(Z_1^{(n)} + \ldots + Z_n^{(n)}, 1/2) \ge C_2 n^{-1/r}. \quad (27)$$

relation (8) then comes from (27) and (26), thanks to (16). Theorem 3 is thus proved

3 Proof of Theorem 4

In this section, we assume $0 < \sigma < 1$ and let the parameters $\delta, r,$ and τ satisfy Condition (16) as well a the condition

$$0 < \sigma < \frac{2\sigma}{2-\sigma} < r < \delta < 2, \tag{28}$$

which is stronger than (15).

Let *i.i.d.* random variables $Y_1^{(n)}, \ldots, Y_n^{(n)}$ satisfy

$$P\{Y_1^{(n)} = k\} = \frac{1}{2}P\{X_1^{(n)} = k\} = \frac{1}{2}P\{X_1^{(n)} = k-1\} \tag{29}$$

Let $L \geq 2$ be given and let I be an closed interval of length L such that $Q(Y_1^{(n)}, L) = P\{Y_1^{(n)} \in I\}$. We have

$$\begin{aligned} Q(Y_1^{(n)}, L) &= \frac{1}{2}P\{X_1^{(n)} \in I\} + \frac{1}{2}P\{X_1^{(n)} \in 1 + I\} \\ &\leq \frac{1}{2}Q(X_1^{(n)}, L) + \frac{1}{2}Q(X_1^{(n)}, L) \leq Q(X_1^{(n)}, L), \end{aligned} \tag{30}$$

so that (9) comes from (1).

Let $q \geq 2$; for any s we have

$$P\{Y_1^{(n)} \equiv s \bmod q\} = \frac{1}{2}P\{X_1^{(n)} \equiv s \bmod q\} + \frac{1}{2}P\{X_1^{(n)} \equiv (s-1) \bmod q\} \tag{31}$$

since the sets $P\{X_1^{(n)} \equiv s \bmod q\}$ and $P\{X_1^{(n)} \equiv (s-1) \bmod q\}$ are disjoint, we have

$$P\{Y_1^{(n)} \equiv s \bmod q\} \leq \frac{1}{2}$$

and equality is clearly obtained when $q = 2$; whence (10).

We finally turn our attention to the concentration of $Y_1^{(n)} + \ldots + Y_n^{(n)}$. For any k, we have

$$P\{Y_1^{(n)} + \ldots + Y_n^{(n)} = k\} = \\ \frac{1}{2^n} \sum_{(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \{0,1\}^n} P\{X_1^{(n)} + \ldots + X_n^{(n)} = k - \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i\}. \tag{32}$$

One way to prove this relation is to introduce a family of *i.i.d.* random variables $U_j^{(n)}$ with value in $\mathbb{Z} \times \{0, 1\}$ such that

$$P\{U_1^{(n)} = (l, i)\} = \frac{1}{2}P\{X_1^{(n)} = l\} \text{ for } i = 0, 1,$$

and consider $Y_j^{(n)}$ to be the sum of the components of $U_j^{(n)} (j = 1, \ldots, n)$.

Let us consider (32) with $k = [n/2]$; we get

$$
\begin{aligned}
&P\{Y_1^{(n)} + \ldots + Y_n^{(n)} = [n/2]\} \\
&\qquad \geq \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \{0,1\}^n \\ \epsilon_n + \ldots + \epsilon_n = [n/2]}} P\{X_1^{(n)} + \ldots + X_n^{(n)} = 0\} \\
&\qquad \geq \binom{n}{[n/2]} \frac{1}{2^n} P\{X_1^{(n)} + \ldots + X_n^{(n)} = 0\}.
\end{aligned}
$$

It is clear from 2.3 that there exists a constant K_3 such that

$$P\{X_1^{(n)} + \ldots + X_n^{(n)} = 0\} \geq K_3 n^{-1/r} \text{ for } n \geq 1$$

and (any weak form of) Stirling's formula then implies

$$Q(Y_1^{(n)} + \ldots + Y_n^{(n)}, \frac{1}{2}) \geq K_4 n^{-1/r - 1/2};$$

since we chose $r > 2\sigma/(2-\sigma)$, the exponent $-1/r - 1/2$ is larger than $-1/\sigma$, whence we deduce the fact that $n^{1/\sigma} Q(Y_1^{(n)} + \ldots + Y_n^{(n)}, \frac{1}{2})$ tends to infinity with n.

References

[1] J-M. Deshouillers, G. A. Freiman and A. A. Yudin.- On bounds for the concentration functions, 1, *IHÉS*, Preprint **8014**, 16p, (1995). It has appeared under a slightly modified form in *Astêrisque*, **258**, 425-436, (1999).

[2] C. G. Esseen.- On the concentration function of a sum of independent random variables, *Z. Wahrsch. Verw. und Gebiete*, **9**, 290-308, (1968).

[3] A. S. Fainleib.- On small values of semi-additive function, *J. Th. Proba*, **11**, 609-619, (1998).

[4] W. Hengartner and R. Theodorescu.- *Concentration functions*, Academic Press, New York, 1973.

[5] V. F. Lev.- Structure Theorem for Multiple Addition and the Frobenius Problem, *J. Nb. Th.*, 79-88, (1996).