

Derajat bebas??

- **Derajat kebebasan (*degrees of freedom*)** → jumlah total pengamatan dalam sampel (N) dikurangi banyaknya kendali (linier) bebas atau pembatasan (restriksi) yang diletakan atas pengamatan tadi.
- **Angka derajat kebebasan adalah banyaknya pengamatan bebas dari total pengamatan N**
- **Rumus umum untuk menentukan derajat kebebasan (db) adalah total pengamatan (N) dikurangi banyaknya parameter yang ditaksir atau $df = N -$ banyaknya parameter yang ditaksir (k). (Gujarati, 1978).**

- Misalnya populasi dengan rata-rata = 10 → diambil sampel 10 orang
- Pertanyaan adalah berapa banyak orang yang dapat kita ambil dengan bebas?
- Misal diambil orang pertama secara bebas dengan skor 14. Sampai dengan orang ke-9 jumlah skor adalah 87
- Bagaimana dengan orang kesepuluh? Apakah diambil secara bebas? Tentu jawabannya adalah tidak.
- **Orang kesepuluh tidak dapat diambil secara bebas lagi. Jika sudah ada 9 angka, angka ke sepuluh tidak lagi dapat ditentukan dengan bebas agar mendapat estimasi yang sama (yaitu mean = 10). orang kesepuluh harus sebesar 13.**
- **kehilangan satu derajat kebebasan, sehingga derajat bebas yang dimiliki adalah $N - 1$, yaitu $10 - 1 = 9$.**

Estimasi dari μ_i

$$E[y_{ij}] = E[\mu_i + \varepsilon_{ij}] = E[\mu_i] = \hat{\mu}_i \Rightarrow \hat{\mu}_i ???$$

$$Q_i = \sum_j^n (y_{ij} - \mu_i)^2$$

$$\frac{dQ_i}{d\mu_i} = 2 \sum_j^n (y_{ij} - \hat{\mu}_i) - 1 = 0$$

$$\sum_j^n y_{ij} - \sum_j^n \hat{\mu}_i = 0$$

$$\sum_j^n y_{ij} = n\hat{\mu}_i$$

$$\frac{\sum_j^n y_{ij}}{n} = \hat{\mu}_i$$

$$\hat{\mu}_i = \frac{y_{i\bullet}}{n} = \bar{y}_{i\bullet}$$

Estimasi Parameter

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$$

Dapat diketahui bahwa :

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{..}$$

Sehingga

$$\hat{y}_{ij} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_i$$

$$\hat{\tau}_i = \hat{y}_{ij} - \hat{\mu}$$

$$\hat{\tau}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}$$

Asumsi Model Efek Tetap

$$\sum_{i=1}^a \tau_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^a \tau_i = \sum_{i=1}^a (\mu_i - \mu) = 0$$

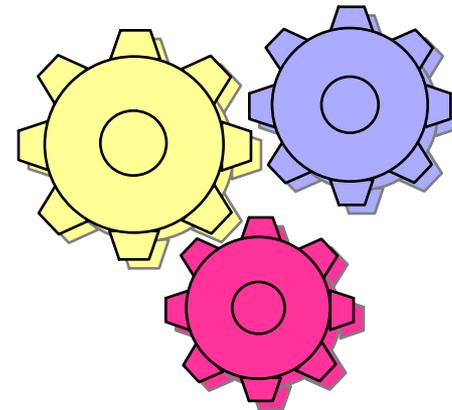
$$\sum_{i=1}^a \mu_i = a\mu \Rightarrow \frac{\mu_1 + \dots + \mu_a}{a} = \mu$$

Artinya asumsi model efek tetap :
Jumlah rata-rata perlakuan ke-i dibagi dengan jumlah perlakuan sama dengan *overall mean*

Contoh 1

Sebagai manager produksi, anda ingin melihat mesin pengisi akan dilihat rata-rata waktu pengisiannya. Diperoleh data seperti di samping. Pada tingkat signifikansi 0.05 adakah perbedaan rata-rata waktu ?

<u>Mesin1</u>	<u>Mesin2</u>	<u>Mesin3</u>
25.40	23.40	20.00
26.31	21.80	22.20
24.10	23.50	19.75
23.74	22.75	20.60
25.10	21.60	20.40



Estimasi Parameter

	j=1	j=2	j=3	
	25.4	23.4	20	
	26.31	21.8	22.2	
	24.1	23.5	19.75	
	23.74	22.75	20.6	
	25.1	21.6	20.4	
$y_{i\cdot} =$	124.65	113.05	102.95	$y_{\cdot\cdot} = 340.65$
$\bar{y}_{i\cdot} =$	24.93	22.61	20.59	$\bar{y}_{\cdot\cdot} = 22.71$
$C_i =$	2.32	2.02	4.34	

$$\hat{\mu}_i = \bar{y}_{i\cdot} \Rightarrow \bar{y}_{1\cdot} = 24.93$$

$$\bar{y}_{2\cdot} = 22.61$$

$$\bar{y}_{3\cdot} = 20.59$$

$$\hat{\tau}_i = \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot}$$

$$\hat{\tau}_1 = \bar{y}_{1\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot} = 24.93 - 22.71 = 2.22$$

$$\hat{\tau}_2 = \bar{y}_{2\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot} = 22.61 - 22.71 = -0.1$$

$$\hat{\tau}_3 = \bar{y}_{3\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot} = 20.59 - 22.71 = -2.12$$

Penyelesaian

i. Hipotesa :

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3$$

H_1 : Ada rata-rata yang tidak sama

ii. Tingkat signifikansi $\alpha = 0.05$

	$\bar{y}_{.1}$	$\bar{y}_{.2}$	$\bar{y}_{.3}$	
	25.4	23.4	20	
	26.31	21.8	22.2	
	24.1	23.5	19.75	
	23.74	22.75	20.6	
	25.1	21.6	20.4	
$y_{i.} =$	124.65	113.05	102.95	$y_{..} = 340.65$
$\bar{y}_{i.} =$	24.93	22.61	20.59	$\bar{y}_{..} = 22.71$
$C_i =$	2.32	2.02	4.34	

8 iii. Menyusun Tabel ANAVA

	i=1	i=2	i=3		
	25.4	23.4	20		
	26.31	21.8	22.2		
	24.1	23.5	19.75		
	23.74	22.75	20.6		
	25.1	21.6	20.4		
yi.=	124.65	113.05	102.95	y..=	340.65

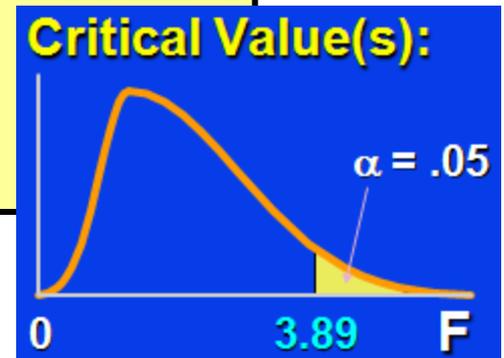
$$\begin{aligned}
 JK_T &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{a.n} \\
 &= 25.40^2 + 26.31^2 + 24.10^2 + 23.74^2 + 25.10^2 + 23.40^2 + 21.80^2 + 23.50^2 + 22.75^2 + 21.60^2 + \\
 &\quad 20.00^2 + 22.20^2 + 19.75^2 + 20.60^2 + 20.40^2 - \frac{340.65^2}{5 \times 3} = 58.2172
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 JK_P &= \frac{\sum_{i=1}^a y_{i.}^2}{n} - \frac{y_{..}^2}{a.n} \\
 &= \frac{124.65^2 + 113.05^2 + 102.95^2}{5} - \frac{340.65^2}{5 \times 3} = 47.1640
 \end{aligned}$$

$$JK_S = 58.2172 - 47.1640 = 11.0532$$

Tabel Anova dan Kesimpulan

Sumber Variasi	Derajat Bebas	Jumlah Kuadrat	Rerata Kuadrat	Statistik F
Perlakuan	3-1=2	47.1640	23.5820	F = 25.60
Sesatan	15-3=12	11.0532	0.9211	
Total	15-1=14	58.2172		



Karena df_1 = derajat bebas perlakuan = 2 dan df_2 = derajat bebas sesatan = 12, maka $f(0.05; 2; 12) = 3.89$. Jadi daerah penolakannya: H_0 ditolak jika $F > 3.89$

Karena $F_{\text{hitung}} = 25.60 > 3.89$ maka H_0 ditolak.
Jadi ada rata-rata waktu pengisian yang tidak sama.

ANOVA

waktu

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	47.164	2	23.582	25.602	.000
Within Groups	11.053	12	.921		
Total	58.217	14			

Decision :

→ Tolak H0 jika $F=25.602 > F(0.05, 2, 12)=3.89$

→ Tolak H0 jika $\alpha=0.05 > \text{Sig.}=0.000$

Tabel Anova

Untuk ukuran sampel yang berbeda

Sumber Variasi	Derajat bebas	Jumlah kuadrat	Rerata Kuadrat	Statistik F
Perlakuan	$a - 1$	JKP	$RKP = JKP / (a - 1)$	$F = RKP / RKS$
Sesatan	$N - a$	JKS	$RKS = JKS / (N - a)$	
Total	$N - 1$	JKT		

Partisi JK untuk ANAVA jumlah sampel tidak sama

$$JK_T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n \left\{ y_{ij} - \bar{y}_{..} \right\}^2 = \sum_i^a \sum_j^n y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$JK_P = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n \left\{ y_{i.} - \bar{y}_{..} \right\}^2 = \sum_{i=1}^a \frac{y_{i.}^2}{n_i} - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$JK_S = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n \left\{ y_{ij} - \bar{y}_{i.} \right\}^2 = JK_T - JK_P$$



Contoh 2

- Dalam Sebuah percobaan biologi 4 konsentrasi bahan kimia digunakan untuk merangsang pertumbuhan sejenis tanaman tertentu selama periode waktu tertentu. Data pertumbuhan berikut, dalam sentimeter, dicatat dari tanaman yang hidup.
- Apakah ada beda pertumbuhan rata-rata yang nyata yang disebabkan oleh keempat konsentrasi bahan kimia tersebut.
- Gunakan signifikansi 0,05.

Konsentrasi			
1	2	3	4
8.2	7.7	6.9	6.8
8.7	8.4	5.8	7.3
9.4	8.6	7.2	6.3
9.2	8.1	6.8	6.9
	8.0	7.4	7.1
		6.1	

Penyelesaian

i. Hipotesa :

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4$$

H_1 : Ada rata-rata yang tidak sama

No	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
1	8.2	7.7	6.9	6.8
2	8.7	8.4	5.8	7.3
3	9.4	8.6	7.2	6.3
4	9.2	8.1	6.8	6.9
5		8	7.4	7.1
6			6.1	
\bar{y}_i	35.5	40.8	40.2	34.4
$\bar{y}_{i\cdot}$	8.875	8.16	6.7	6.88

$$\hat{\mu}_i = \bar{y}_{i\cdot} \Rightarrow \bar{y}_{1\cdot} = 8.875$$

$$\bar{y}_{2\cdot} = 8.16$$

$$\bar{y}_{3\cdot} = 6.7$$

$$\bar{y}_{4\cdot} = 6.88$$

15 ii. Tingkat signifikansi $\alpha = 0.05$

No	j=1	j=2	j=3	j=4
1	8.2	7.7	6.9	6.8
2	8.7	8.4	5.8	7.3
3	9.4	8.6	7.2	6.3
4	9.2	8.1	6.8	6.9
5		8	7.4	7.1
6			6.1	
$y_{i\cdot}$	35.5	40.8	40.2	34.4
$\bar{y}_{i\cdot}$	8.875	8.16	6.7	6.88

$$\begin{aligned}
 \text{JKT} &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \frac{y_{\cdot\cdot}^2}{N} \\
 &= 8.2^2 + 8.7^2 + 9.4^2 + 9.2^2 + 7.7^2 + 8.4^2 + 8.6^2 + 8.1^2 + 8.0^2 + 6.9^2 + 5.8^2 + 7.2^2 \\
 &\quad + 6.8^2 + 7.4^2 + 6.1^2 + 6.8^2 + 7.3^2 + 6.3^2 + 6.9^2 + 7.1^2 - \frac{150.9^2}{20} = 19.350
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{JKP} &= \sum_{i=1}^a \frac{y_{i\cdot}^2}{n_i} - \frac{y_{\cdot\cdot}^2}{N} \\
 &= \frac{35.5^2}{4} + \frac{40.8^2}{5} + \frac{40.2^2}{6} + \frac{34.4^2}{5} - \frac{150.9^2}{20} = 15.462
 \end{aligned}$$

$$\text{JKG} = 19.350 - 15.462 = 3.888$$

Tabel Anova dan Kesimpulan

Sumber Variasi	Derajat Bebas	Jumlah Kuadrat	Rerata Kuadrat	F
Perlakuan	$4-1=3$	15.462	5.154	F = 21.213
Sesatan	$20-4=16$	3.888	0.243	
Total	$20-1=19$	19.350		

Karena $F_{hitung} = 21.213 > 3.24$ maka H_0 ditolak.
Jadi ada rata-rata yang tidak sama.