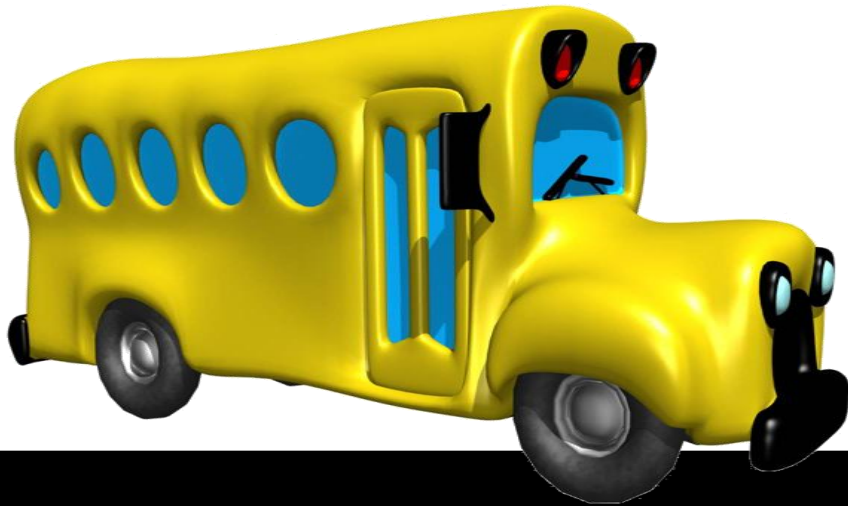


ANALISIS KOVARIANSI

part 2



Analisis Kovariansi merupakan suatu analisis statistika untuk mengetahui pengaruh satu atau lebih variabel bebas terhadap variabel terikat dengan memperhatikan satu atau lebih variabel *konkomitan*.



- Model Analisis Kovariansi dengan Satu variabel bebas dan satu variabel konkomitan :

$$Y_{ij} = \mu + \gamma(X_{ij} - \bar{X}) + \tau_i + \varepsilon_{ij}$$



Uji Efek Perlakuan

i. $H_0 : \tau_i = 0, \forall i$

$H_1 : \tau_i \neq 0, \exists i, i = 1, 2, \dots, t$

ii. $\alpha = 5\%$

iii. Statistika Uji:

$$F_{\text{rasio}} = \frac{RK_{P_{(adj)}}}{RK_{S_{(adj)}}}$$

iv. DK : H_0 ditolak jika $F_{\text{rasio}} > F_{(\alpha, t-1, t(r-1)-1)}$



Tabel Analisis Kovariansi Single factor dengan satu kovariat

<u>Sumber Variansi</u>	<u>Jumlah Kuadrat (JK)</u>			
	Y	X	XY	db
<u>Perlakuan</u>	<u>JK_{Py}</u>	<u>JK_{Px}</u>	<u>JK_{Pxy}</u>	t-1
<u>Sesatan</u>	<u>JK_{Sy}</u>	<u>JK_{Sx}</u>	<u>JK_{Sxy}</u>	t(r-1)
<u>Total</u>	<u>JK_{Ty}</u>	<u>JK_{Tx}</u>	<u>JK_{Txy}</u>	tr-1



Tabel Analisis kovariansi sebagai koreksi dr ANAVA

<u>Sumber</u> <u>Variansi</u>	JK Adjusted	db Adjusted	RK Adjusted	<u>Frasio</u>
<u>Perlakuan</u>	$JK_{P(adj)}$	$t-1$	$RK_{P(adj)}$	$RK_{P(adj)} / RK_{S(adj)}$
<u>Sesatan</u>	$JK_{S(adj)}$	$t(r-1)-1$	$RK_{S(adj)}$	
Total	$JK_{T(adj)}$	$tr-2$		



Analisis Variansi untuk Y

$$JK_{Ty} = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_i \sum_j Y_{ij}^2 - \frac{Y_{..}^2}{tr}$$

$$JK_{Py} = \sum_i (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_i \frac{Y_{i.}^2}{r} - \frac{Y_{..}^2}{tr}$$

$$JK_{Sy} = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2$$

$$JK_{Ty} = JK_{Py} + JK_{Sy}$$



Analisis Variansi untuk X

$$JK_{Tx} = \sum_i \sum_j (X_{ij} - \bar{X}_{..})^2 = \sum_i \sum_j X_{ij}^2 - \frac{X_{..}^2}{tr}$$

$$JK_{Px} = \sum_i (\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2 = \sum_i \frac{X_{i.}^2}{r} - \frac{X_{..}^2}{tr}$$

$$JK_{Sx} = \sum_i \sum_j (X_{ij} - \bar{X}_{i.})^2$$

$$JK_{Tx} = JK_{Px} + JK_{Sx}$$



Analisis Variansi untuk XY

$$JK_{Txy} = \sum_i \sum_j (X_{ij} - \bar{X}_{..})(Y_{ij} - \bar{Y}_{..}) = \sum_i \sum_j X_{ij}Y_{ij} - \frac{X_{..}Y_{..}}{tr}$$

$$JK_{Pxy} = \sum_i n_i (\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}) = \sum_i \frac{X_{i.}Y_{i.}}{r} - \frac{X_{..}Y_{..}}{tr}$$

$$JK_{Sxy} = \sum_i \sum_j (X_{ij} - \bar{X}_{i.})(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})$$

$$JK_{Txy} = JK_{Pxy} + JK_{Sxy}$$



$$JK_{T(adj)} = JK_{Ty} - \frac{(JK_{Txy})^2}{JK_{Tx}}$$

$$JK_{S(adj)} = JK_{Sy} - \frac{(JK_{Sxy})^2}{JK_{Sx}}$$

$$JK_{P(adj)} = JK_{T(adj)} - JK_{S(adj)}$$

$$RK_{P(adj)} = \frac{JK_{P(adj)}}{t-1}$$

$$RK_{S(adj)} = \frac{JK_{S(adj)}}{t(r-1)-1}$$



Aplikasi

Ada suatu percobaan dalam bidang industri yang ingin mengetahui mesin terhadap respon kekuatan serat yang dihasilkan (Y) dan dipergunakan dalam industri tekstil. Terdapat 3 perlakuan mesin, masing-masing 5x. Telah diketahui bahwa kekuatan serat yang dihasilkan juga tergantung pada diameter serat tersebut. Untuk itu digunakan concomitant variabel (X) yaitu diameter serat yang dihasilkan (10-3cm)



data

Mesin 1		Mesin 2		Mesin 3	
X	Y	X	Y	X	Y
20	36	22	40	21	35
25	41	28	48	23	37
24	39	22	39	26	42
25	42	30	45	21	34
32	49	28	44	15	32



$$Y_{ij} = \mu + \gamma(X_{ij} - \bar{X}) + \tau_i + \varepsilon_{ij}$$

Y_{ij} = nilai pengamatan kekuatan serat

yang dihasilkan mesin ke - i pada ulangan ke - j

μ = nilai rerata kekuatan serat sesungguhnya

γ = koefisien regresi yang menunjukkan Y_{ij} pada X_{ij}

X_{ij} = pengukuran diameter serat yang dihasilkan mesin ke - i

$\bar{X}..$ = nilai rerata diameter serat yang diukur

τ_i = efek/ pengaruh mesin ke - i

ε_{ij} = komponen sesatan/galat yang timbul pada

ulangan ke - j pada mesin ke - i



i = jumlah perlakuan, $i=1, \dots, t$

j = jumlah perulangan, $j=1, \dots, r$

Asumsi

- Diameter serat bersifat tetap dan tidak berkorelasi (bebas) dengan mesin-mesin yang dicobakan,
- Hubungan pengaruh antara kekuatan serat dan diameter serat bersifat linier serta koefisien regresi setiap mesin adalah sama,

$$\varepsilon_{ij} \sim NID(0, \sigma^2)$$



Estimasi Parameter

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{..} = \frac{603}{5 \times 3} = 40.2, \bar{x}_{..} = \frac{362}{5 \times 3} = 24.13$$

$$\hat{\gamma} = \frac{JK_{Sxy}}{JK_{Sx}} = \frac{186.6}{195.6} = 0.954$$

$$\hat{\tau}_i = \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..} - \hat{\gamma}(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})$$

$$\hat{\tau}_1 = \bar{Y}_{1.} - \bar{Y}_{..} - \hat{\gamma}(\bar{X}_{1.} - \bar{X}_{..}) = 41.4 - 40.2 - 0.954(25.2 - 24.13) = 0.17922$$

$$\hat{\tau}_2 = \bar{Y}_{2..} - \bar{Y}_{..} - \hat{\gamma}(\bar{X}_{2..} - \bar{X}_{..}) = 43.2 - 40.2 - 0.954(26 - 24.13) = 1.21602$$

$$\hat{\tau}_3 = \bar{Y}_{3..} - \bar{Y}_{..} - \hat{\gamma}(\bar{X}_{3.} - \bar{X}_{..}) = 36 - 40.2 - 0.954(21.2 - 24.13) = -1.40478$$

[illegible]

Perhitungan

Mesin 1		Mesin 2		Mesin 3								
X	Y	X	Y	X	Y	X1^2	Y1^2	X2^2	Y2^2	X3^2	Y3^2	
20	36	22	40	21	35	400	1296	484	1600	441	1225	
25	41	28	48	23	37	625	1681	784	2304	529	1369	
24	39	22	39	26	42	576	1521	484	1521	676	1764	
25	42	30	45	21	34	625	1764	900	2025	441	1156	
32	49	28	44	15	32	1024	2401	784	1936	225	1024	
126	207	130	216	106	180	3250	8663	3436	9386	2312	6538	
25.2	41.4	26	43.2	21.2	36							
jumlah y=		603										
jumlah x=		362										



Analisis Variansi untuk Y

$$JK_{Ty} = \sum_i \sum_j Y_{ij}^2 - \frac{Y_{..}^2}{tr} = 36^2 + 41^2 + \dots + 32^2 - \frac{603^2}{3 \times 5} = 346.4$$

$$JK_{Py} = \sum_i \frac{Y_{i.}^2}{r} - \frac{Y_{..}^2}{tr} = \frac{207^2 + 216^2 + 180^2}{5} - \frac{603^2}{3 \times 5} = 140.4$$

$$JK_{Sy} = JK_{Ty} - JK_{Py} = 346.4 - 140.4 = 206$$

Mesin 1		Mesin 2		Mesin 3							
X	Y	X	Y	X	Y	X1^2	Y1^2	X2^2	Y2^2	X3^2	Y3^2
20	36	22	40	21	35	400	1296	484	1600	441	1225
25	41	28	48	23	37	625	1681	784	2304	529	1369
24	39	22	39	26	42	576	1521	484	1521	676	1764
25	42	30	45	21	34	625	1764	900	2025	441	1156
32	49	28	44	15	32	1024	2401	784	1936	225	1024
126	207	130	216	106	180	3250	8663	3436	9386	2312	6538
25.2	41.4	26	43.2	21.2	36						
jumlah y=		603									
jumlah x=		362									

Analisis Variansi untuk X

$$JK_{Tx} = \sum_i \sum_j X_{ij}^2 - \frac{X_{..}^2}{tr} = (20)^2 + \dots + (15)^2 - \frac{362^2}{5 \times 3} = 261.73$$

$$JK_{Px} = \sum_i \frac{X_{i.}^2}{r} - \frac{X_{..}^2}{tr} = \frac{(126)^2 + (130)^2 + (106)^2}{5} - \frac{362^2}{5 \times 3} = 66.13$$

$$JK_{Sx} = JK_{Tx} - JK_{Px} = 195.6$$

Mesin 1		Mesin 2		Mesin 3							
X	Y	X	Y	X	Y	X1^2	Y1^2	X2^2	Y2^2	X3^2	Y3^2
20	36	22	40	21	35	400	1296	484	1600	441	1225
25	41	28	48	23	37	625	1681	784	2304	529	1369
24	39	22	39	26	42	576	1521	484	1521	676	1764
25	42	30	45	21	34	625	1764	900	2025	441	1156
32	49	28	44	15	32	1024	2401	784	1936	225	1024
126	207	130	216	106	180	3250	8663	3436	9386	2312	6538
25.2	41.4	26	43.2	21.2	36						
jumlah y=		603									
jumlah x=		362									

Analisis Variansi untuk XY

$$JK_{Txy} = \sum_i \sum_j X_{ij} Y_{ij} - \frac{X_{..} Y_{..}}{tr} = (20 \times 36 + \dots + 15 \times 32) - \frac{362 \times 603}{3 \times 5} = 282.6$$

$$JK_{Pxy} = \sum_i \frac{X_{i.} Y_{i.}}{r} - \frac{X_{..} Y_{..}}{tr} = \frac{(126 \times 207 + 130 \times 216 + 106 \times 180)}{5} - \frac{362 \times 603}{3 \times 5} = 96$$

$$JK_{Sxy} = JK_{Txy} - JK_{Pxy} = 186.6$$

Mesin 1		Mesin 2		Mesin 3							
X	Y	X	Y	X	Y	X1^2	Y1^2	X2^2	Y2^2	X3^2	Y3^2
20	36	22	40	21	35	400	1296	484	1600	441	1225
25	41	28	48	23	37	625	1681	784	2304	529	1369
24	39	22	39	26	42	576	1521	484	1521	676	1764
25	42	30	45	21	34	625	1764	900	2025	441	1156
32	49	28	44	15	32	1024	2401	784	1936	225	1024
126	207	130	216	106	180	3250	8663	3436	9386	2312	6538
25.2	41.4	26	43.2	21.2	36						
jumlah y=		603									
jumlah x=		362									

Tabel ANACOVA faktor tunggal dengan satu kovariat

Sumber Variansi	Jumlah Kuadrat (JK)			
	Y	X	XY	db
Perlakuan	$JK_{Py}=140.4$	$JK_{Px}=66.13$	$JK_{Pxy}=96$	$t-1=3-1=2$
Sesatan	$JK_{Sy}=206$	$JK_{Sx}=195.6$	$JK_{Sxy}=186.6$	$t(r-1)=3(5-1)=12$
Total	$JK_{Ty}=346.4$	$JK_{Tx}=261.73$	$JK_{Txy}=282.6$	$tr-1=3 \times 5-1=14$



$$JK_{T(adj)} = JK_{Ty} - \frac{(JK_{Txy})^2}{JK_{Tx}} = 346.4 - \frac{(282.6)^2}{261.73} = 41.27$$

$$JK_{S(adj)} = JK_{Sy} - \frac{(JK_{Sxy})^2}{JK_{Sx}} = 206 - \frac{(186.6)^2}{195.6} = 27.99$$

$$JK_{P(adj)} = JK_{T(adj)} - JK_{S(adj)} = 13.28$$

$$RK_{P(adj)} = \frac{JK_{P(adj)}}{t-1} = \frac{13.28}{3-1} = 6.64$$

$$RK_{S(adj)} = \frac{JK_{S(adj)}}{t(r-1)-1} = \frac{27.99}{3(5-1)-1} = \frac{27.99}{11} = 2.54$$

$$JK_{Ty} = 346.4$$

$$JK_{Py} = 140.4$$

$$JK_{Sy} = 206$$

$$JK_{Tx} = 261.73$$

$$JK_{Px} = 66.13$$

$$JK_{Sx} = 195.6$$

$$JK_{Txy} = 282.6$$

$$JK_{Pxy} = 96$$

$$JK_{Sxy} = 186.6$$



Tabel ANACOVA sebagai koreksi dari ANAVA

<u>Sumber</u> <u>Variansi</u>	JK Adjusted	db Adjusted	RK Adjusted	<u>Frasio</u>
<u>Perlakuan</u>	$JK_{P(adj)}=13.28$	$t-1=3-1=2$	$RK_{P(adj)}=6.64$	$RKP(adj)/RKS(adj)$ $=6.64/2.54$ $=2.614173$
<u>Sesatan</u>	$JK_{S(adj)}=27.99$	$t(r-1)-1=3(5-1)-1=11$	$RK_{S(adj)}=2.54$	
Total	$JK_{T(adj)}=41.27$	$tr-2=3 \times 5-2=13$		

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	318.414 ^a	3	106.138	41.718	.000
Intercept	96.921	1	96.921	38.095	.000
x	178.014	1	178.014	69.969	.000
mesin	13.284	2	6.642	2.611	.118
Error	27.986	11	2.544		
Total	24587.000	15			
Corrected Total	346.400	14			

a. R Squared = .919 (Adjusted R Squared = .897)



Uji Efek Perlakuan

i. $H_0 : \tau_i = 0, \forall i$

$H_1 : \tau_i \neq 0, \exists i, i = 1, 2, \dots, t$

ii. $\alpha = 5\%$

iii. Statistika Uji:

$$F_{\text{rasio}} = \frac{RK_{P_{(adj)}}}{RK_{S_{(adj)}}} = 2.61$$

iv. DK: H_0 ditolak jika $F_{\text{rasio}} = 2.61 > F(0.05, 2, 11) = 3.98$

karena $F_{\text{rasio}} = 2.61 < F(0.05, 2, 11) = 3.98$ maka H_0 tidak ditolak



UJI KOMPARASI GANDA ANTAR MESIN 1, MESIN 2, DAN MESIN 3

	MESIN I					MESIN II					MESIN III				
	X	Y	X ²	Y ²	XY	X	Y	X ²	Y ²	XY	X	Y	X ²	Y ²	XY
Total	126	207	3250	8663	5299	130	216	3436	9386	5664	106	180	2312	6538	3872
rerata	25.2	41.4				26.0	43.2				21.2	36.0			

$$T_{xy} = 5299 + 5664 + 3872 = 14835$$

$$bw = \frac{T_{xy} - \sum_{j=1}^k \frac{T_{xj}T_{yj}}{n_j}}{\sum_{j=1}^k SS_{yi}}$$

$$bw = \frac{14835 - \left(\frac{126 \cdot 207}{5} + \frac{130 \cdot 216}{5} + \frac{106 \cdot 180}{5} \right)}{93,2 + 54,8 + 58} = \frac{186,6}{206} = 0,905$$

$$SS_{y1} = \sum y_1^2 - \frac{\left(\sum y_1 \right)^2}{r} = 8663 - \frac{207^2}{5} = 93.2$$

$$SS_{y2} = \sum y_2^2 - \frac{\left(\sum y_2 \right)^2}{r} = 9386 - \frac{216^2}{5} = 54.8$$

$$SS_{y3} = \sum y_3^2 - \frac{\left(\sum y_3 \right)^2}{r} = 6538 - \frac{180^2}{5} = 58$$



	MESIN I					MESIN II					MESIN III				
	X	Y	X ²	Y ²	XY	X	Y	X ²	Y ²	XY	X	Y	X ²	Y ²	XY
Total	126	207	3250	8663	5299	130	216	3436	9386	5664	106	180	2312	6538	3872
rerata	25.2	41.4				26.0	43.2				21.2	36.0			

$$\bar{X}_i - adj = \bar{X}_i - bw(\bar{Y}_j - \bar{Y})$$

$$\bar{X}_1 - adj = 25,2 - 0,905(41,4 - 40,2) = 24,11$$

$$\bar{X}_2 - adj = 26 - 0,905(43,2 - 40,2) = 23,28$$

$$\bar{X}_3 - adj = 21,2 - 0,905(36 - 40,2) = 25,001$$



1. Hipotesis

$H_0 : \mu_1 - adj = \mu_2 - adj$

$H_1 : \mu_1 - adj \neq \mu_2 - adj$

$H_0 : \mu_1 - adj = \mu_3 - adj$

$H_1 : \mu_1 - adj \neq \mu_3 - adj$

$H_0 : \mu_2 - adj = \mu_3 - adj$

$H_1 : \mu_2 - adj \neq \mu_3 - adj$

2. Tingkat signifikansi 0,05

3. Statistik uji :

$$F_{i-j} = \frac{\left((\bar{X}_i - adj) - (\bar{X}_j - adj) \right)^2}{RK_{S(adj)} \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$$



$$F_{i-j} = \frac{\left((\bar{X}_i - adj) - (\bar{X}_j - adj) \right)^2}{RK_{S(adj)} \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$$

$$F_{1-2} = \frac{(24,11 - 23,285)^2}{2,54 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \right)} = \frac{0,687}{1,016} = 0,676$$

$$F_{1-3} = \frac{(24,11 - 25,001)^2}{2,54 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \right)} = \frac{0,786}{1,016} = 0,774$$

$$F_{2-3} = \frac{(23,285 - 25,001)^2}{2,54 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \right)} = \frac{2,945}{1,016} = 2,89$$

$$DK = \{ F | F > (2-1)F_{0,05;3-1,15-3-1} \}$$

$$RK_{S(adj)} = 2.54$$

$$\bar{x}_1 - adj = 24.11$$

$$\bar{x}_2 - adj = 23.28$$

$$\bar{x}_3 - adj = 25.001$$

Ho 1-2 diterima.

Ho 1-3 diterima.

Ho 2-3 diterima.



SOAL

- Peneliti ingin mengetahui apakah ketiga metode mengajar, yaitu metode A, B dan C mempunyai efek yang sama dalam pembelajaran matematika pokok bahasan bangun ruang. Ketiga metode tersebut dicobakan kepada tiga kelas, yaitu kelas IA (untuk metode A), kelas IB (untuk metode B) dan kelas IC (untuk metode C). Akan tetapi seperti yang sudah diketahui bahwa nilai siswa untuk pokok bahasan bangun ruang tidak lepas dari kemampuan siswa pada pokok bahasan bangun datar. Untuk keperluan tersebut dari masing-masing kelas diambil secara random sejumlah anak, dan hasilnya adalah sebagai berikut :



	<u>Metode A</u>		<u>Metode B</u>		<u>Metode C</u>	
	X	Y	X	Y	X	Y
Data <u>Amatan</u>	60	80	50	40	70	75
	80	90	60	60	70	70
	75	80	90	60	80	90
	50	60	70	60	75	75
	60	60	65	55	65	70
	40	55	40	60	55	60
	90	70	35	50	40	55
	100	90	50	50	90	80
	55	65	80	70	80	80
	65	65			70	75