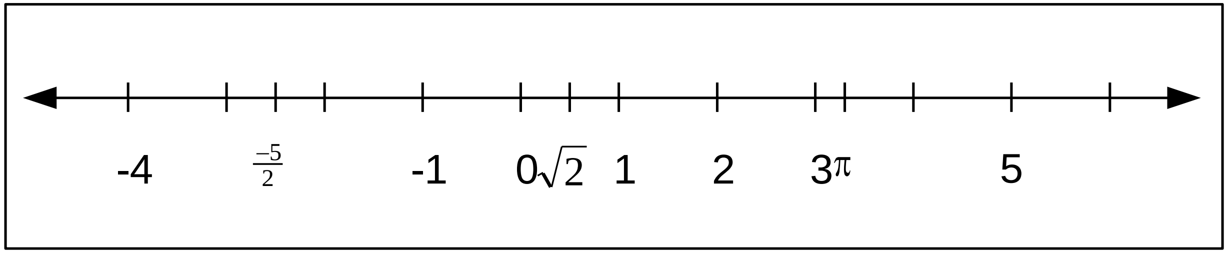
Bab 1

Part 2

Ketaksamaan dan Fungsi Trigonometri

Garis bilangan

Setiap bilangan real berkorespondensi dengan satu dan hanya satu titik pada sebuah garis bilangan, yang disebut garis bilangan real. Ex:



Selang

Himpunan bagian dari garis bilangan disebut selang

INTERVAL BILANGAN REAL

Interval adalah suatu himpunan bagian dari garis bilangan real yang mengandung paling sedikit 2 bilangan real yang berbeda dan semua bilangan real yang terletak diantara keduanya.

Untuk setiap $x, a, b, c \in R$,

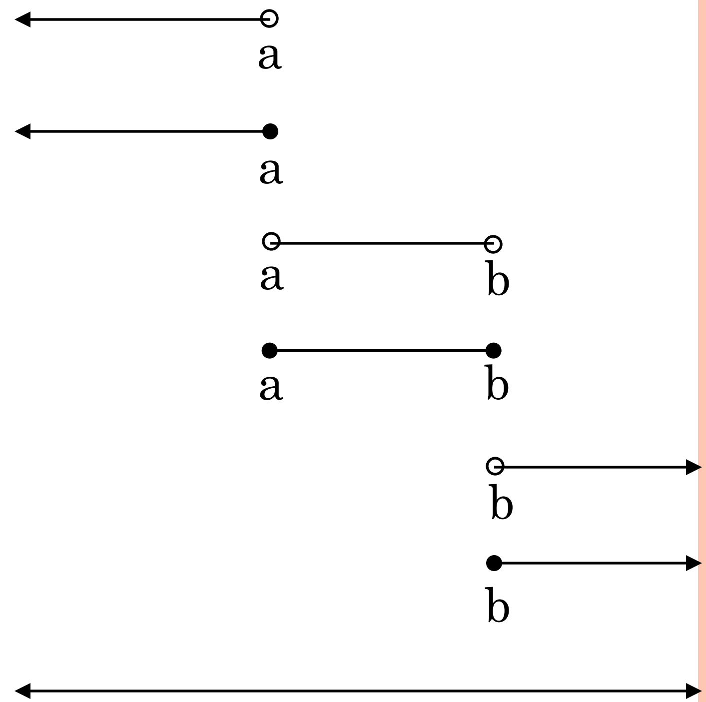
1. $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ disebut *interval tutup*
2. $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ disebut *interval setengah tertutup* atau *terbuka*
3. $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ disebut *interval setengah terbuka* atau *tertutup*
4. $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$ disebut *interval terbuka*

Selang

Jenis-jenis selang

Himpunan	**selang**
$\{x \mid x < a\}$	$(-\infty, a)$
$\{x \mid x \leq a\}$	$(-\infty, a]$
$\{x \mid a < x < b\}$	(a, b)
$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$
$\{x \mid x > b\}$	(b, ∞)
$\{x \mid x \geq b\}$	$[b, \infty)$
$\{x \mid x \in \Re\}$	(∞, ∞)

Grafik



1. Pertidaksamaan

- Pertidaksamaan satu variabel adalah suatu bentuk aljabar dengan satu variabel yang dihubungkan dengan relasi urutan.
- Bentuk umum pertidaksamaan :

$$\frac{A(x)}{B(x)} < \frac{D(x)}{E(x)}$$

dengan A(x), B(x), D(x), E(x) adalah suku banyak (polinom) dan $B(x) \neq 0$, $E(x) \neq 0$

- Menyelesaikan suatu pertidaksamaan adalah mencari semua himpunan bilangan real yang membuat pertidaksamaan berlaku.
- Himpunan bilangan real ini disebut juga Himpunan Penyelesaian (HP)

Cara menentukan HP :

1. Bentuk pertidaksamaan diubah menjadi :

$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, dengan cara :

- Ruas kiri atau ruas kanan dinolkan
- Menyamakan penyebut dan menyederhanakan bentuk pembilangnya

2. Dicari titik-titik pemecah dari pembilang dan penyebut dengan cara P(x) dan Q(x) diuraikan menjadi faktor-faktor linier dan/ atau kuadrat

3. Gambarkan titik-titik pemecah tersebut pada garis bilangan, kemudian tentukan tanda (+, -) pertidaksamaan di setiap selang bagian yang muncul

Contoh :
Tentukan Himpunan Penyelesaian

1. $13 \geq 2x - 3 \geq 5$

$$13 + 3 \geq 2x \geq 5 + 3$$

$$16 \geq 2x \geq 8$$

$$8 \geq x \geq 4$$

$$4 \leq x \leq 8$$

$$\text{Hp} = [4,8]$$

2. $-2 < 6 - 4x \le 8$

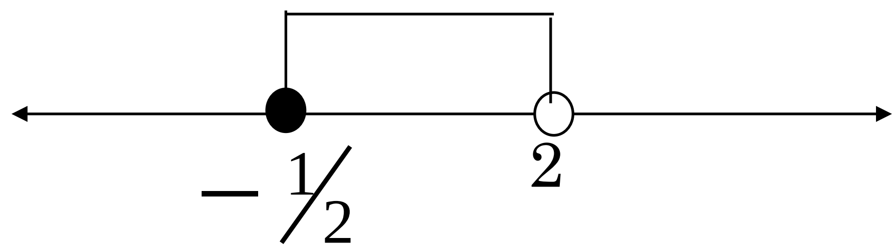
$-8 < -4x \le 2$

$8 > 4x \ge -2$

$-2 \le 4x < 8$

$-\dfrac{1}{2} \le x < 2$

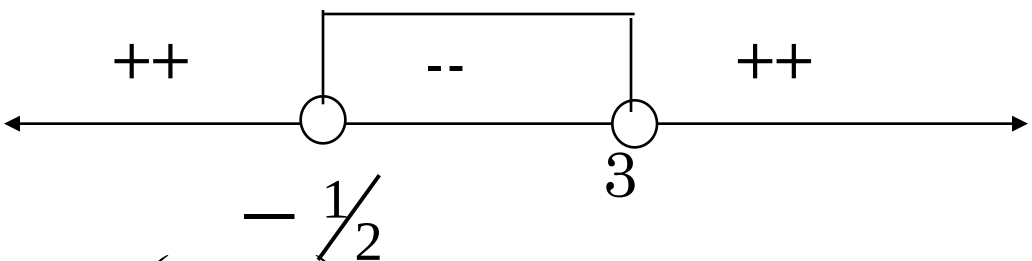
$$\text{Hp} = \left[-\frac{1}{2}, 2\right)$$



3 $2x^2 - 5x - 3 < 0$

$$(2x+1)(x-3) < 0$$

Titik Pemecah (TP) : $x = -\dfrac{1}{2}$ dan $x = 3$



$$\text{Hp} = \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$$

4 $2x-4\le 6-7x\le 3x+6$

$2x-4\le 6-7x$ dan $6-7x\le 3x+6$

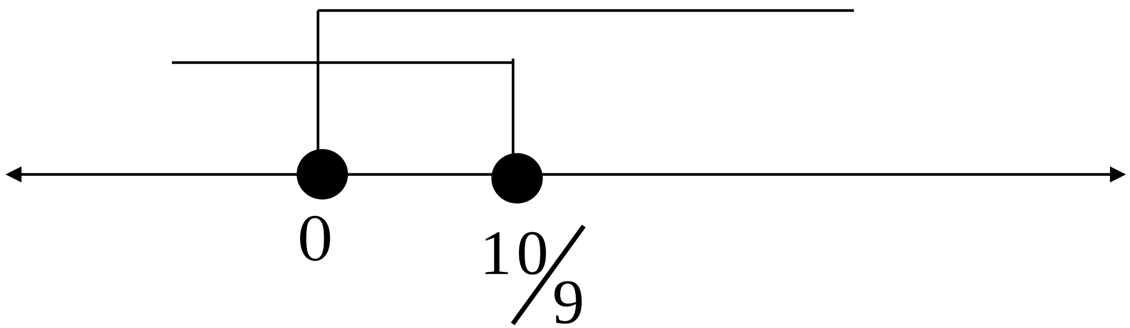
$2x+7x\le 6+4$ dan $-7x-3x\le -6+6$

$9x\le 10$ dan $-10x\le 0$

$x\le \dfrac{10}{9}$ dan $10x\ge 0$

$x\le \dfrac{10}{9}$ dan $x\ge 0$

$$\mathrm{Hp} = \left(-\infty, \frac{10}{9}\right] \cap [0, \infty)$$



$$\mathrm{Hp} = \left[0, \frac{10}{9}\right]$$

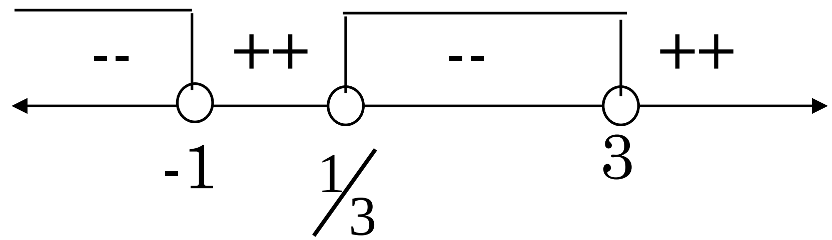
5. $$\frac{1}{x+1} < \frac{2}{3x-1}$$

$$\frac{1}{x+1} - \frac{2}{3x-1} < 0$$

$$\frac{(3x-1)-(2x+2)}{(x+1)(3x-1)} < 0$$

$$\frac{x-3}{(x+1)(3x-1)} < 0$$

TP : -1, $\frac{1}{3}$, 3



$$\text{Hp} = \quad (-\infty,-1) \cup \left(\frac{1}{3},3\right)$$

6. $$\frac{x+1}{2-x} \le \frac{x}{3+x}$$

$$\frac{x+1}{2-x} - \frac{x}{3+x} \le 0$$

$$\frac{(x+1)(3+x) - x(2-x)}{(2-x)(3+x)} \le 0$$

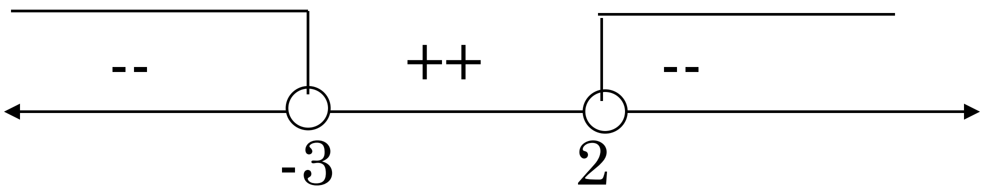
$$\frac{2x^2 + 2x + 3}{(2-x)(x+3)} \le 0$$

Untuk

pembilang $2x^2 + 2x + 3$ mempunyai

Diskriminan (D) < 0, sehingga nilainya selalu positif, Jadi TP : 2,-3

Pembilang tidak menghasilkan titik pemecah.



Hp = $\left(\infty,-3\right)\cup\left(2,\infty\right)$

CONTOH :

1. Selesaikan persamaan berikut:

   $|2x - 5| = 9$

2. Tentukan solusi dari ketaksamaan berikut:

$$|x - 5| < 9$$

$$\left|5 - \frac{2}{x}\right| < 1$$

SOAL

$$1. \left|x+5\right| < \left|2x+6\right|$$

$$2. \left|2x-11\right| \geq \left|x+1\right|$$

3. Berapakah nilai a dan t yang memenuhi persamaan

$$\left|t-a\right| = a-t\,?$$

TUGAS INDIVIDUAL 1_TI1

KUMPULKAN MINGGU DEPAN!

1. $5x + 2 > x - 6$
2. $3 - x < 5 + 3x$
3. $2/3\, x - ½ \leq 0$
4. $13 \geq 2x - 3 \geq 5$
5. $4/x - 3 > 2/x - 7$
6. $x^2 - 3x + 2 > 0$
7. $x^3 + 1 > x^2 + x$
8. $|4x + 3| = 7$
9. $|3x - 8| = 4$
10. $|7x| = 4 - x$
11. $2x + 3 = |4x + 5|$
12. $|5x - 3| = |3x + 5|$
13. $|x + 4| < 7$
14. $|3x - 4| < 2$
15. $|3x + 2| \geq 1$
16. $\left|\dfrac{x+2}{2x-3}\right| < 4$
17. $\dfrac{x+5}{x+3} < \dfrac{x+1}{x-1}$

FUNGSI TRIGONOMETRI
REVIEW

Ukuran sudut :

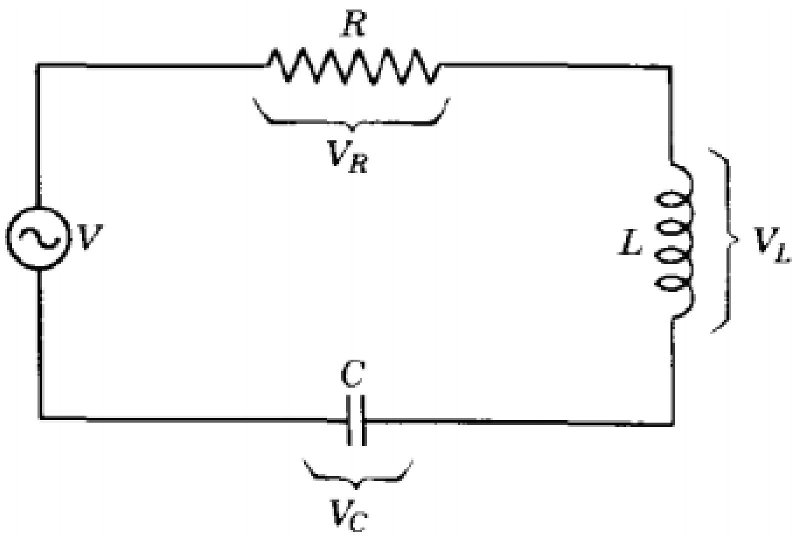
1. Sistem Seksagesimal

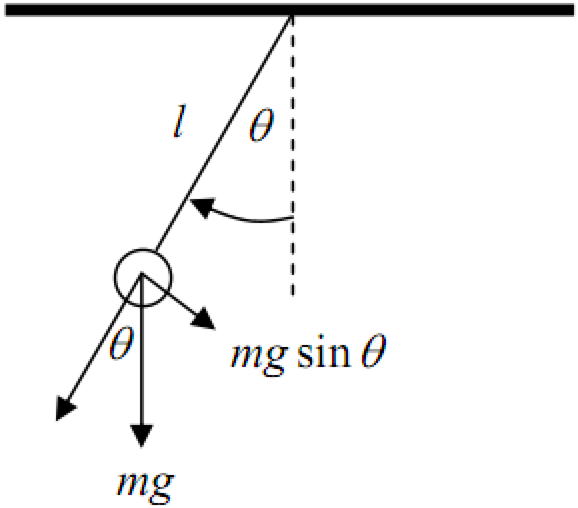
   bangsa Babilonia (→Irak) membagi satu putaran menjadi 360 bagian sama → ditulis 360^0 → ditemukan sistem waktu 1 derajat = 60 menit, 1 menit = 60 detik

2. Radian

   → digunakan dalam kemiliteran zaman dulu untuk menentukan penembakan meriam

Applied example

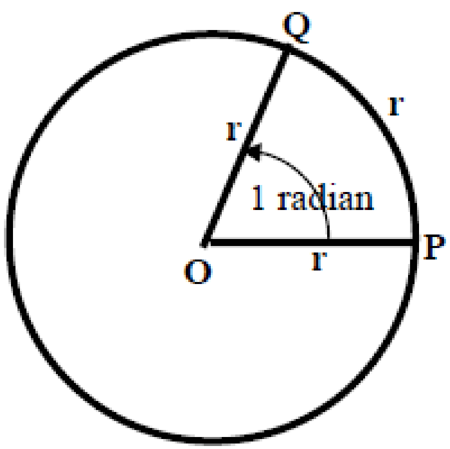




Dalam rangkaian arus bolak-balik dengan komponen R (resistor), L (induktor) dan C (kapasitor), sebagaimana ditunjukkan dalam gambar 5.2, misalnya arus total yang mengalir pada rangkaian dinyatakan dengan bentuk fungsi harmonik $I = I_0 \sin \omega t$. Jika V_R adalah beda tegangan pada kaki-kaki resistor R dan I adalah kuat arus yang mengalir pada hambatan tersebut, maka berdasarkan hukum Ohm dapat dinyatakan

$$V_R = IR$$

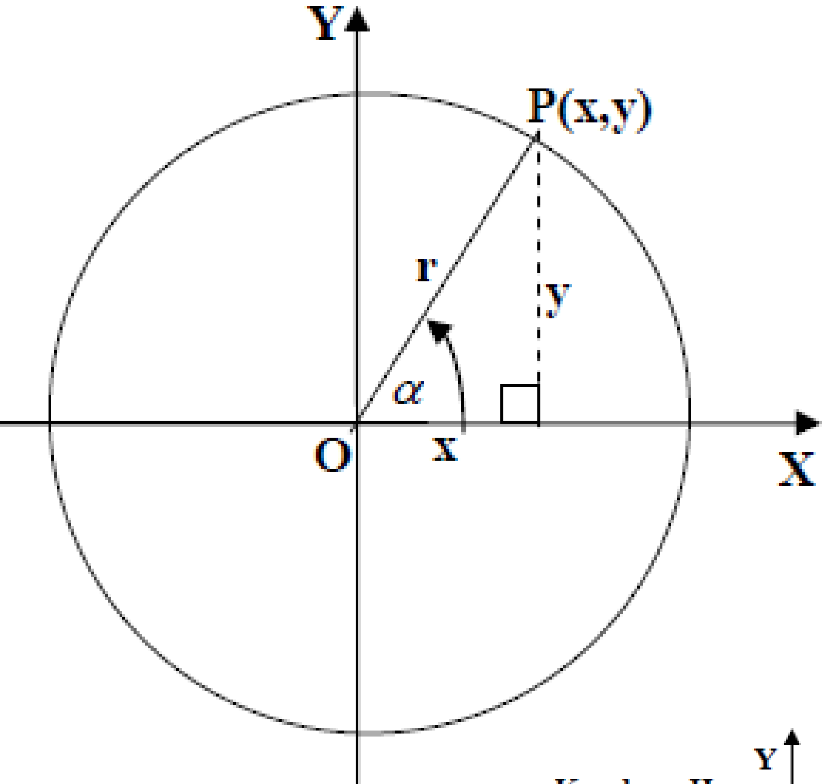
Meaning



$$POQ = \frac{\text{panjang busur PQ}}{r}\,\text{radian} = \frac{r}{r}\ \text{radian} = 1\ \text{radian}.$$

$$360^o = \frac{2\pi r}{r}\,radian = 2\pi\ radian$$

1. $180^0 = \pi$ radian
2. 1 radian $\approx 57{,}296^0 \approx 57^0 17'45''$
3. $1^0 \approx 0{,}017453$ radian

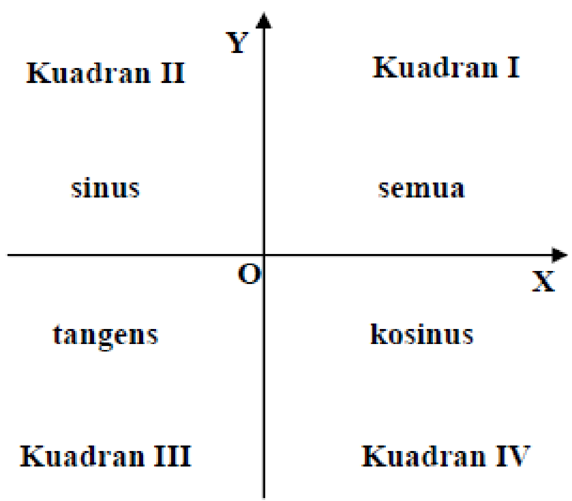


Dengan mencermati definisi perbandingan trigonometri untuk sudut α, maka :

$$\sin\ \alpha = \frac{y}{r} \qquad \cot\ \alpha = \frac{x}{y}$$

$$\cos\ \alpha = \frac{x}{r} \qquad \sec\ \alpha = \frac{r}{x}$$

$$\tan\ \alpha = \frac{y}{x} \qquad \csc\ \alpha = \frac{r}{y}$$



SUMMARY

(i) $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

(ii) $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$

(iii) $\csc\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$

(iv) $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

(vi) $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$

$$\cot^2\alpha + 1 = \csc^2\alpha$$

$$\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(90^o - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\tan(90^o - \alpha) = \cot\alpha$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

Kebalikan rumus-rumus di atas adalah :

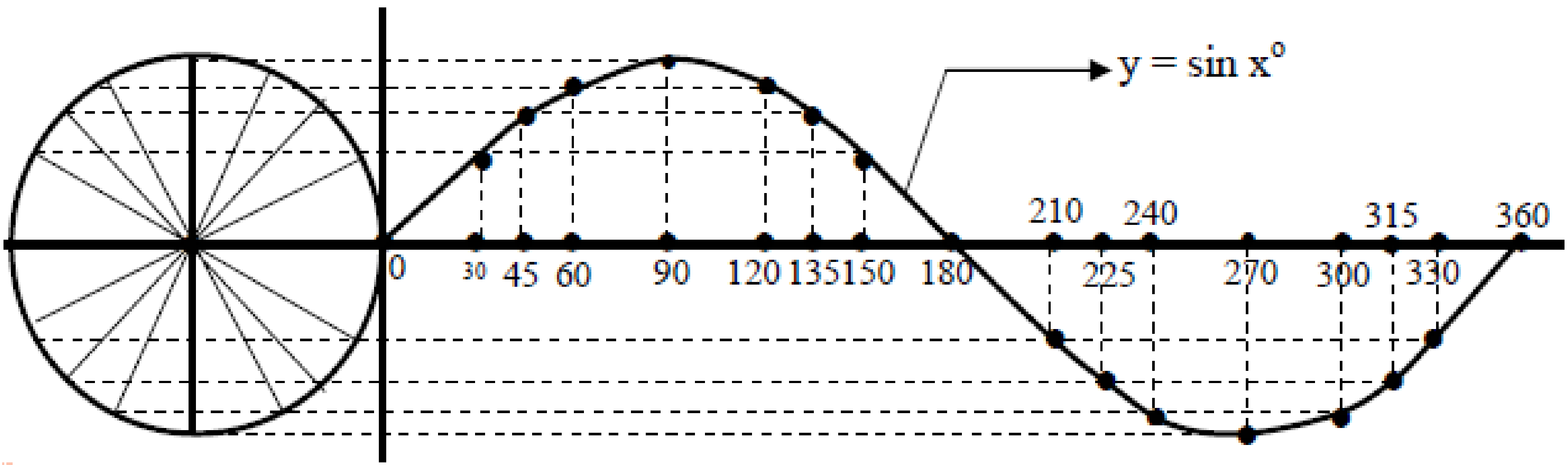
$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

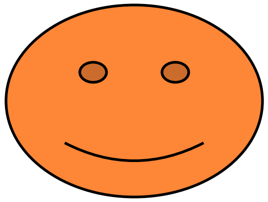
$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

$$-2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$$

Grafik SINus





Contoh

1. Buktikan $\dfrac{\sin a}{\operatorname{cosec} a} + \dfrac{\cos a}{\sec a} = 1$

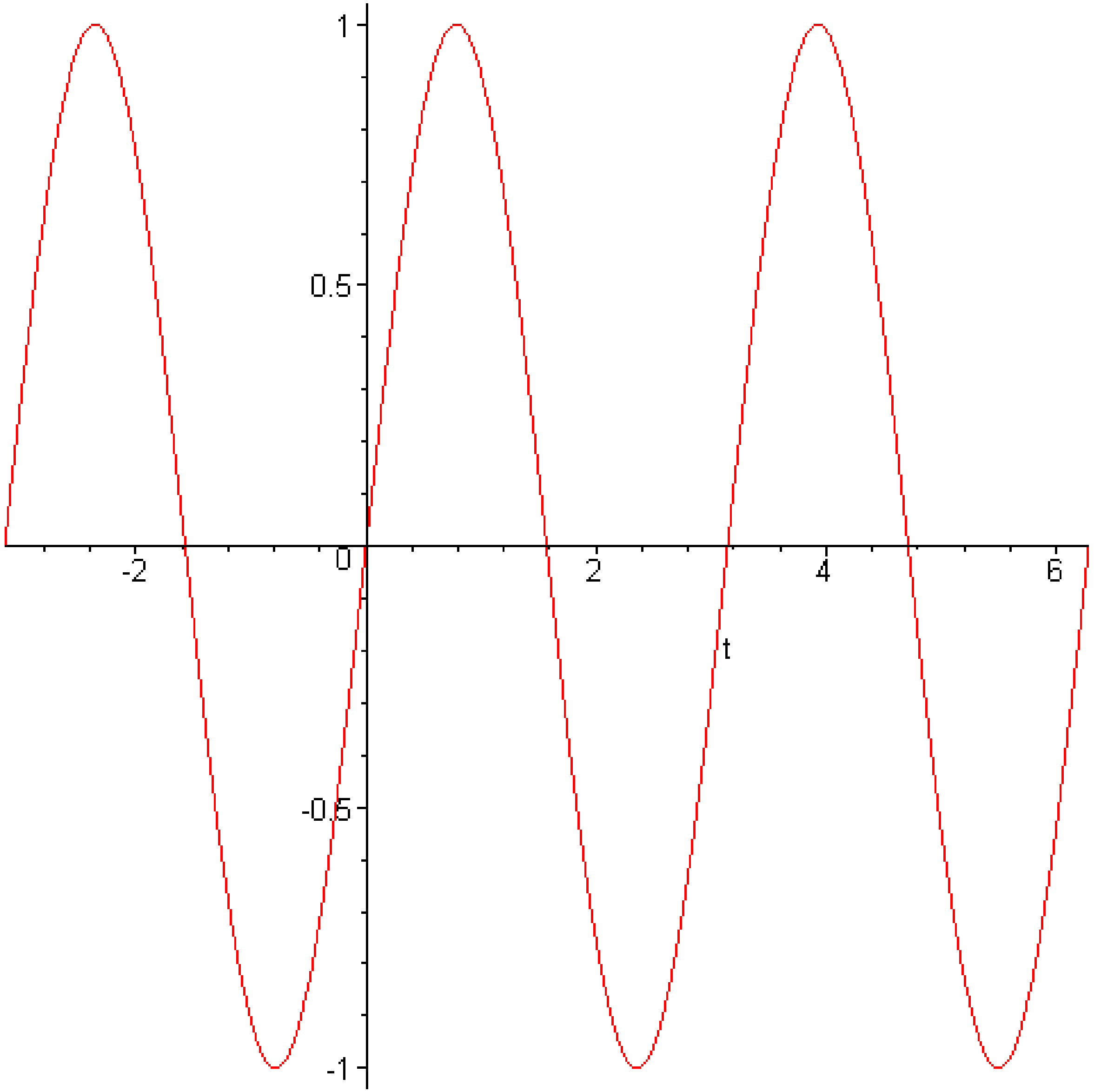
2. Cari $\cos 51.8^0$

3. Sketsa grafik pada $[-\pi, 2\pi]$

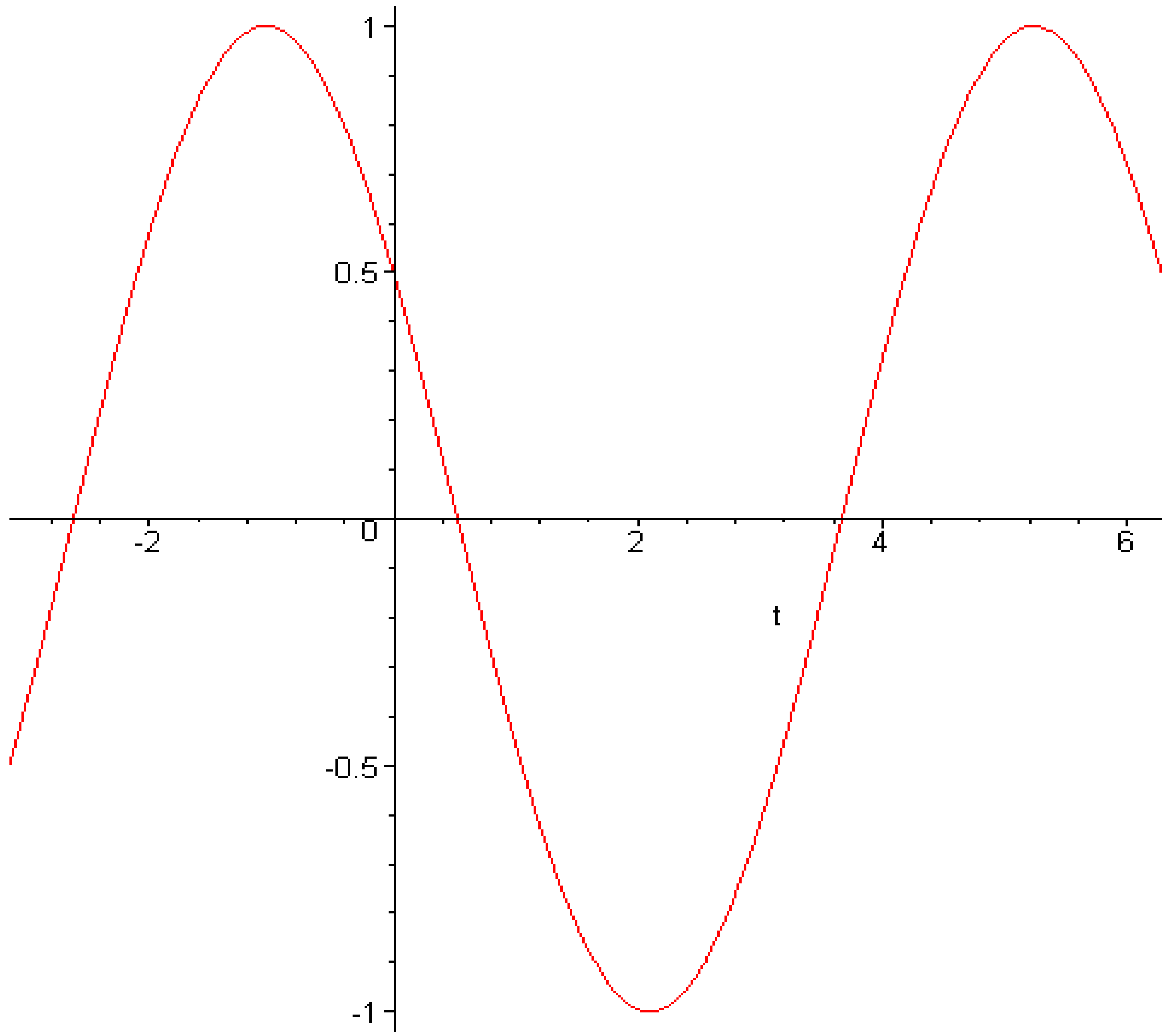
a. $y = \sin 2t$

b. $z = \cos\left(t + \dfrac{\pi}{3}\right)$

3.a.



$$z := \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$$



BUKTIKAN !

1. $\cos^2\theta(1+\tan^2\theta)=1$

2. $\cos^4\theta-\sin^4\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

3. $(\csc\beta+\cot\beta)(1-\cos\beta)=\sin\beta$

4. $(\cos\alpha+\sin\alpha)(1-\sin^2\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)=\cos^2\alpha$

5. $\dfrac{\cos^2\alpha+1}{\sin^2\alpha\sin^4\alpha}=2\csc^2\alpha+\sec^2\alpha$

6. $\dfrac{(1-\tan\alpha)(1+\tan\alpha)}{\sin\alpha}=\csc\alpha-\sec\alpha\tan\alpha$

7. $\sec\alpha-\cos\alpha=\tan\alpha\sin\alpha$

8. $\tan\gamma\cos^4\gamma+\cot\gamma\sin^4\gamma=\sin\gamma\cos\gamma$

9. $\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$

10. $\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha.\sin^2\alpha$

1. Hitung tanpa daftar : $\cos^2 18^\circ + \cos^2 54^\circ$
2. Hitung tanpa daftar :$\sin^2 6^\circ + \sin^2 42^\circ + \sin^2 66^\circ + \sin^2 78^\circ$
3. Jadikanlah bentuk logaritmis (bentuk hasil kali) : $\sin x + \sin 3x + \sin 5x - \sin 9x$

Buktikan identitas di bawah ini

4. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2(1 + \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma)$ jika $\alpha+\beta+\gamma = 90^0$
5. $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 4 \cos(45^0-\alpha)\cos(45^\circ-\beta) \cos(45^\circ-\gamma)$ jika $\alpha+\beta+\gamma=45^\circ$
6. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$ jika $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$
7. $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha \tan\beta \tan\gamma$ jika $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
8. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4 \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma$ jika $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
9. Jika $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$ maka buktikan $\tan\alpha \tan\beta + \tan\beta \tan\gamma + \tan\gamma \tan\alpha=1$
10. Buktikan bahwa ΔABC sama kaki, jika $\sin\alpha \cos^2\beta = \sin\beta \cos^2\alpha$