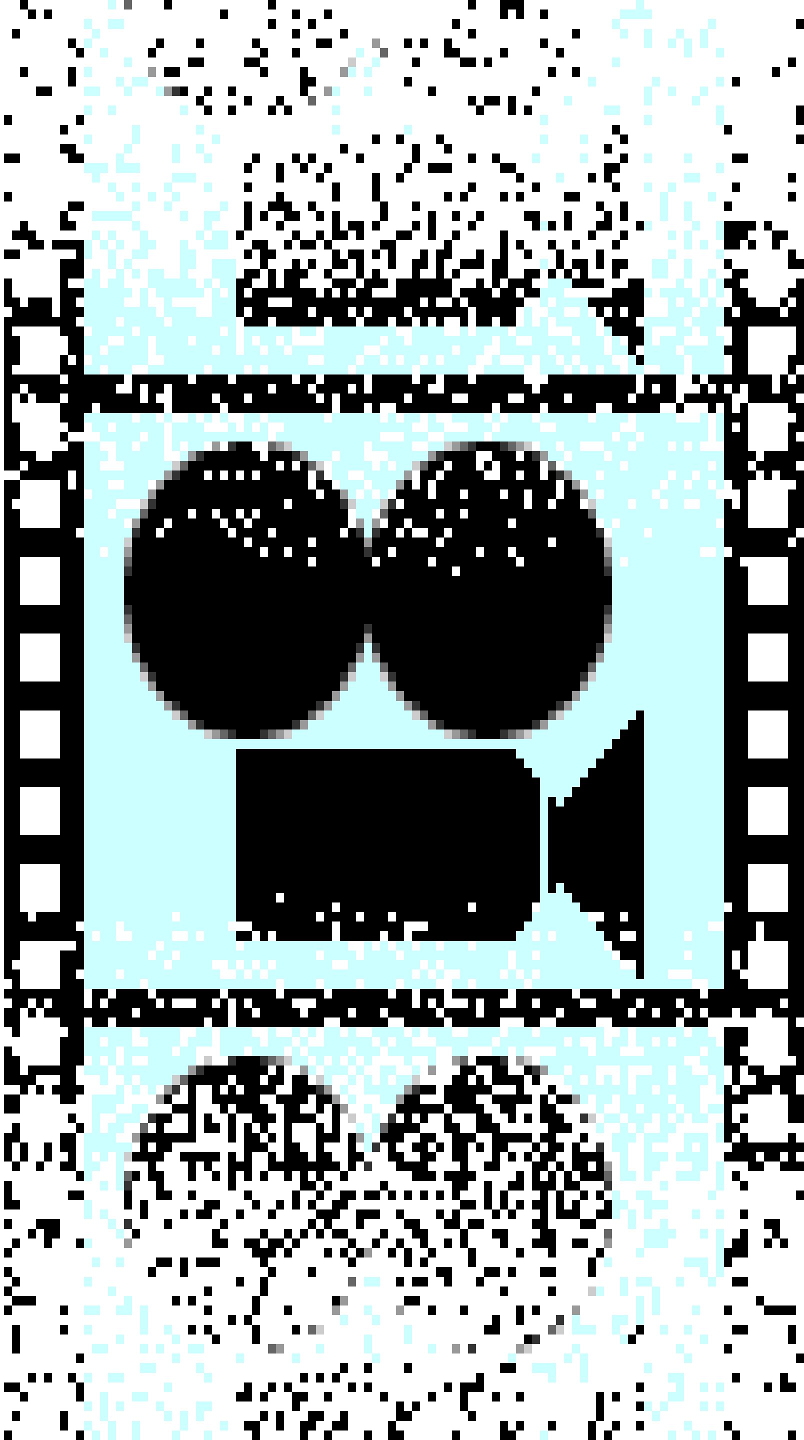
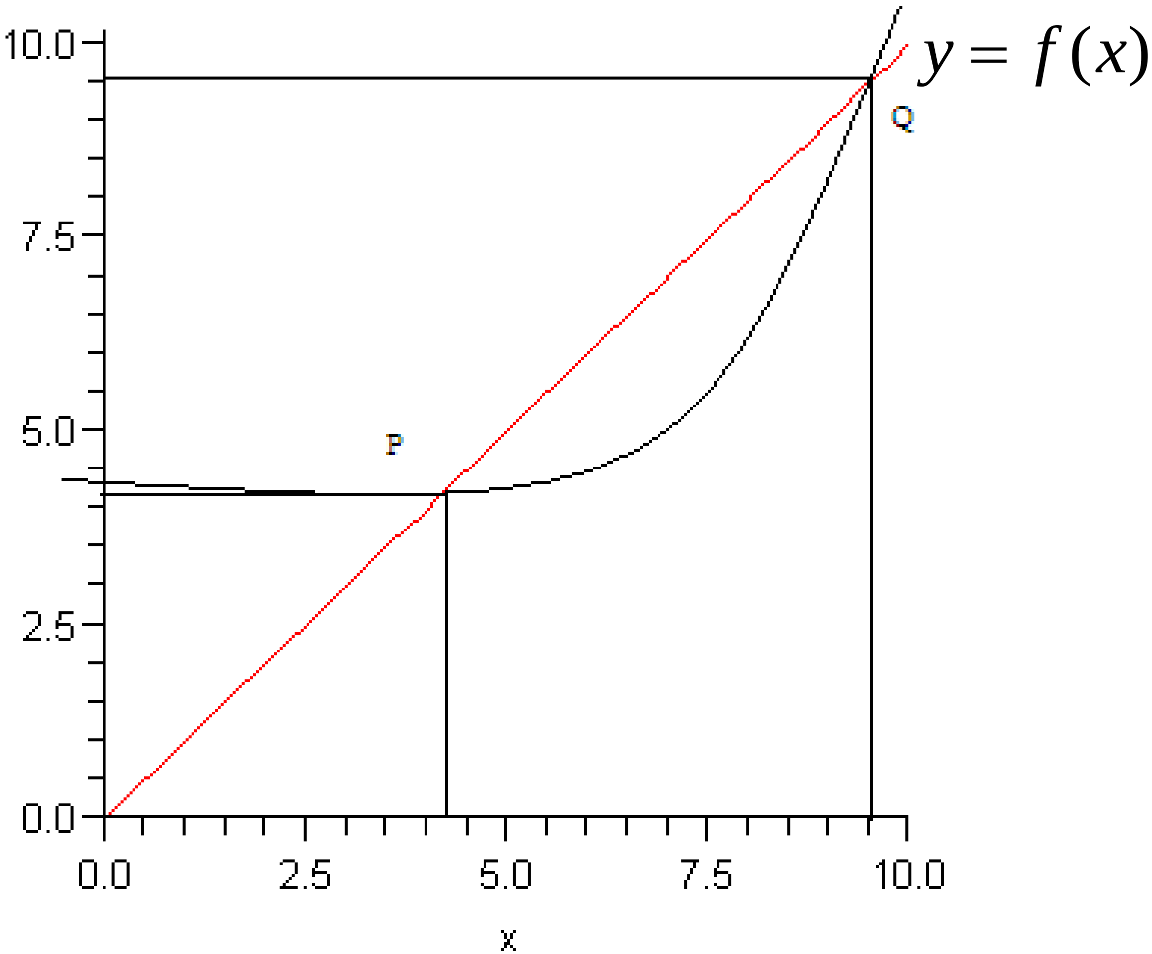
DERIVATIF

BAB 2



Turunan secara intuisi



Perhatikan grafik dari fungsi *f* dengan $y = f(x)$ dengan l garis lurus yang melalui titik $P(x_0, y_0)$ dan $Q(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$

$$y_0 + \Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right)$$

$$\underline{y_0 \qquad\quad = f(x_0) \qquad\qquad}$$

$$\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f(x_0)$$

jadi

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\text{bila } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ ada}$$

Maka limit tesebut dinamakan hasil bagi differensial atau derivatif atau turunan dari fungsi *f* dengan $y = f(x)$ di titik P(x0,y0) adalah:

$$y'_{x=x0} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x0} = \left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x0} = f'(x = x_0)$$

Definisi

Turunan fungsi *f* adalah fungsi yang nilainya di setiap bilangan sebarang x di dalam daerah asal *f* diberikan oleh :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x+\Delta x\right) - f(x)}{\Delta x}$$

Jika limit ini ada, turunan fungsi f dilambangkan dgn f’

Jika *x1* suatu bilangan tertentu di dalam daerah asal *f* maka :

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x_1+\Delta x\right) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Cth

Jika diketahui $f(x) = 3x^2 + 12$ maka dengan menggunakan definisi carilah *f* ’

Continue…

- Perhatikan $f'(x_1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f\left(x_1 + \Delta x\right) - f(x_1)}{\Delta x}$

Jika diambil $x_1 + \Delta x = x \Rightarrow \Delta x \to 0 \sim x \to x_1$

Maka

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

Ex.Kerjakan soal di atas untuk x=2

Teorema

Bila $u(x)$ dan $v(x)$ masing-masing merupakan fungsi yang kontinu dan mempunyai turunan pertama pada domain D maka berlaku :

$$1.\ \frac{d}{dx}\left\{u(x)\pm v(x)\right\}=\left\{u(x)\pm v(x)\right\}'$$

$$=\frac{du(x)}{dx}+\frac{dv(x)}{dx}$$

$$=u'(x)\pm v'(x)$$

$$2.\ \frac{d}{dx}\left\{u(x).v(x)\right\}=\left\{u(x).v(x)\right\}'$$

$$=u(x)\frac{dv(x)}{dx}+v(x)\frac{du(x)}{dx}$$

$$=u(x)v'(x)+u'(x)v(x)$$

$$3.\ k=\text{konstan},\ \frac{d}{dx}\left\{ku(x)\right\}=\left\{ku(x)\right\}'$$

$$=k\frac{du(x)}{dx}=ku'(x)$$

4. $$\frac{d}{dx}\left\{\frac{u(x)}{v(x)}\right\} = \left\{\frac{u(x)}{v(x)}\right\}'$$

$$= \frac{v(x)\dfrac{du(x)}{dx} - u(x)\dfrac{dv(x)}{dx}}{\{v(x)\}^2}$$

$$= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\{v(x)\}^2}$$

5. jika $y = f(u),\ u = g(x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$

6. jika $y = f(x)$ mempunyai invers $f^{-1}(x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{dx/dy}$

- Proses penghitungan turunan *f* ’ dari *f* → diferensiasi
- Jika fungsi *f* mempunyai turunan di x1 maka dikatakan fungsi *f* diferensiabel di x1
- Dkl. Fungsi *f* diferensiabel di x1 jika f ‘(x1) ada
- Jika suatu fungsi *f* diferensiabel di setiap bilangan riil dalam Df nya maka *f* dinamakan fungsi diferensiabel

7. jika $f(x)=x^{n}, n\in Z \Rightarrow f'(x)=nx^{n-1}$

jika $f(x)=x^{-n}, n\in Z^{-}, x\neq 0 \Rightarrow f'(x)=-nx^{-n-1}$

Latihan

1. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ jika

   (a) $y=\dfrac{5x^2}{2(x+1)}$

   (b) $y=\cos^2\left(\pi x^2\right)$.

2. Dengan menggunakan definisi turunan, tentukan $f'(x)$ untuk fungsi f berikut

$$f(x)=x^2-3x+4.$$

Teorema :

jika *f* diferensiabel di x1 maka *f* kontinu di x1

Ex. Periksa apakah $f(x) = |x|$ kontinu di x=0 dan diff di x=0?

$f(x) = |x|$

$i.\quad f(0) = |0| = 0$

$ii.\quad \lim_{x \to 0} f(x) = ???$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

$iii.\quad \lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

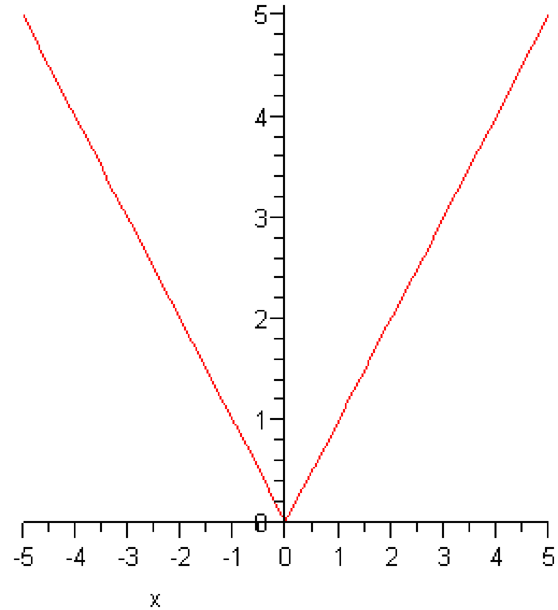
$$f(\Delta x) = |\Delta x|, \quad f(0) = 0$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

$$\Delta x \geq 0,\ f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$\Delta x < 0,\ f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} \neq \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} \Rightarrow f'(0) \text{ tidak ada}$$



Definisi

Jika fungsi f didefinisikan di x1 maka turunan kanan dari *f* di x1 yang dinotasikan dengan $f'_+(x_1)$

$$f'_+(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f\left(x_1 + \Delta x\right) - f(x_1)}{\Delta x} \Leftrightarrow f'_+(x_1) = \lim_{x \to x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

Jika fungsi f didefinisikan di x1 maka turunan kiri dari *f* di x1 yang dinotasikan dengan $f'_-(x_1)$

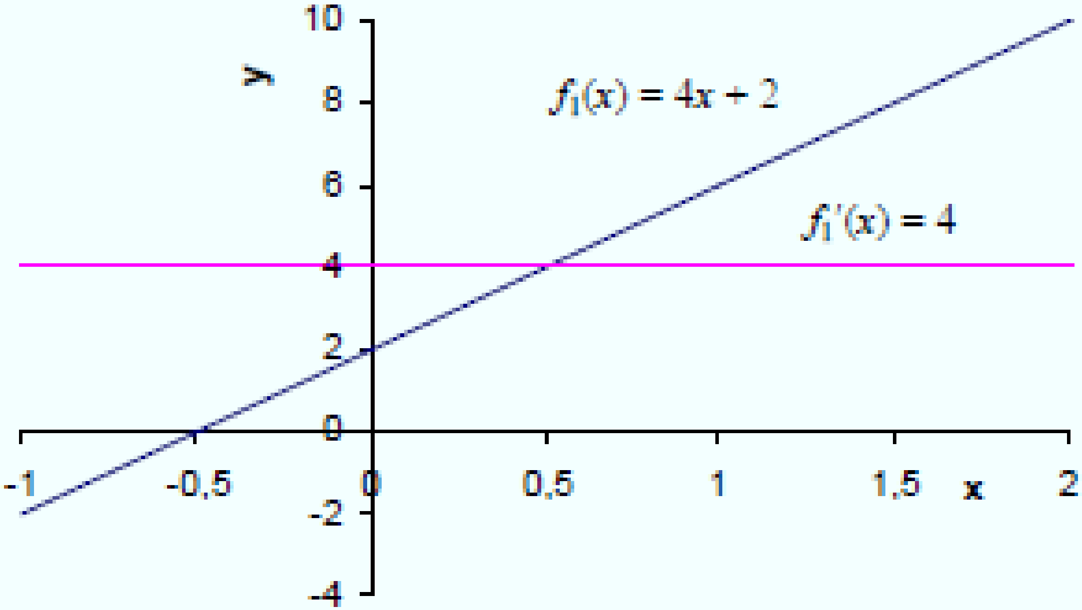
$$f'_-(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f\left(x_1 + \Delta x\right) - f(x_1)}{\Delta x} \Leftrightarrow f'_-(x_1) = \lim_{x \to x_1^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

$$\therefore\ f \text{ diff di } x_1 \text{ jika } f'_-(x_1) = f'_+(x_1)$$

Turunan Fungsi Polinomial

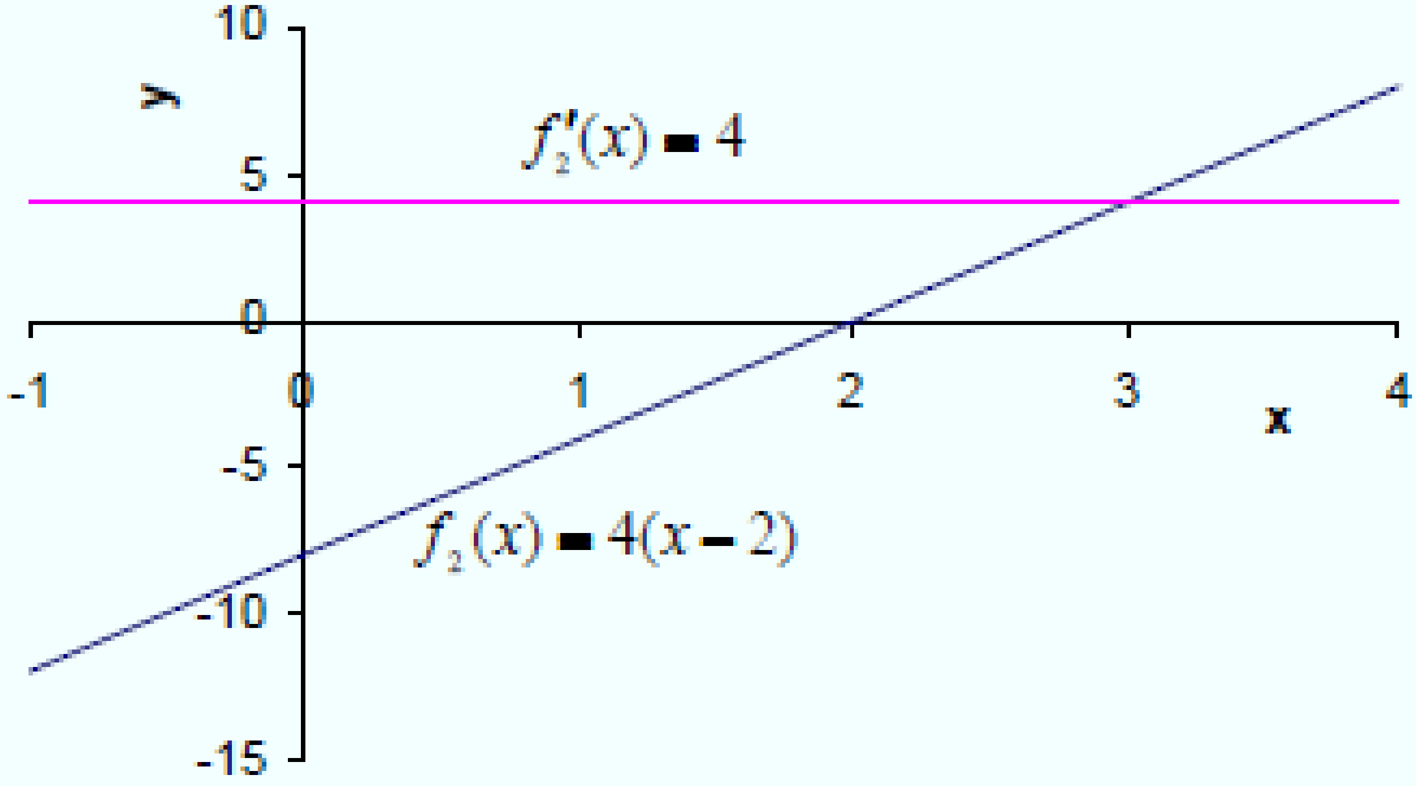
1). $y_1 = f_1(x) = 4x + 2$

$$\Rightarrow f_1'(x) = \frac{\{4(x+\Delta x)+2\} - \{4x+2\}}{\Delta x} = 4$$



Suku bernilai konstan pada $f_1(x)$, berapapun besarnya, positif maupun negatif, tidak memberikan kontribusi dalam fungsi turunannya.

2). $y_2 = f_2(x) = 4(x-2) \Rightarrow f_2(x) = 4x - 8 \Rightarrow f_2'(x) = 4$



Turunan Fungsi Tersusun (Fungsi Komposisi)

Misalkan $y = f(x)$ dimana $u = g(x)$, menentukan fungsi tersusun $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ dan apabila g mempunyai turunan di x, dan f mempunyai turunan di $u = g(x)$ maka turunan fungsi komposisi $(f \circ g)(x)$ ditentukan dengan rumus :

$$\mathbf{(f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x)}$$

atau dengan notasi Leibniz :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Rumus ini dikenal dengan nama **aturan rantai** .

Bukti

Berdasar definisi umum turunan fungsi, maka turunan dari fungsi komposisi :

$$(fog)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f\,og)(x+\Delta x) - (f\,og)(x))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x) - f(g(x))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x) - \Delta g(x)) - f(g(x))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x) + \Delta g(x)) - f(g(x))}{\Delta g(x)} \bullet \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta g(x) \to 0} \frac{f(g(x) - \Delta g(x))}{\Delta g(x)} \bullet \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= f'(g(x)).g'(x) \qquad \text{(terbukti)}$$

Turunan Fungsi Implisit

Jika $y = f(x)$, maka turunan fungsi implisit $F(x,y) = c$ adalah dengan memandang y fungsi dari x.

Contoh 7

Tentukan y' jika $x^2 + 3xy + y^2 = 4$

Jawab :

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 3xy + y^2) = \frac{d}{dx}(4)$$

$$2x + 3y + 3xy' + 2y \cdot y' = 0$$

$$(3x + 2y)y' = -2x - 3y$$

$$y' = -\frac{3x + 3y}{3x + 2y}.$$

Latihan . Tentukan y'

$$x^2 + xy + y^2 = 8$$

Solusi

$x^2 + xy + y^2 = 8$. Fungsi implisit ini merupakan sebuah persamaan. Jika kita melakukan operasi matematis di ruas kiri, maka operasi yang sama harus dilakukan pada ruas kanan agar kesamaan tetap terjaga. Kita lakukan diferensiasi (cari turunan) di kedua ruas, dan kita akan peroleh

$$2x + x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(x + 2y)\frac{dy}{dx} = -2x - y$$

Untuk titik-titik di mana $(x + 2y) \neq 0$ kita peroleh turunan

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y}{x + 2y}$$

Untuk suatu titik tertentu misalnya (1,2) maka $\frac{dy}{dx} = -\frac{2+2}{1+4} = -0{,}8$. Inilah kemiringan garis singgung di titik (1,2) pada kurva fungsi y yang kita hadapi.

Turunan Tingkat Tinggi

Andaikan fungsi turunan pertama $f'(x)$ atau $\dfrac{df(x)}{dx}$ dari suatu fungsi adalah suatu fungsi yang dapat didiferensialkan pada x, maka turunan dari turunan pertama ini, disebut turunan kedua, dan ditulis dengan notasi $f''(x) = \dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$.

Demikian juga andaikan turunan kedua ini fungsi yang dapat didiferensialkan, maka turunan dari turunan kedua ini disebut turunan ketiga dan ditulis dengan notasi $f'''(x)$ $= \dfrac{d^3f(x)}{dx^3}$.

Begitu dan seterusnya turunan dari turunan ke n-1 disebut turunan ke-n dan ditulis dengan notasi $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^nf(x)}{dx^n}$.

SOLUSI

$$f(x) = \sin x \rightarrow \frac{df(x)}{dx} = \cos x = \sin(x + 1 \, . \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -\sin x = \sin(x + 2 \, . \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{d^3 f(x)}{dx^3} = -\cos x = \sin(x + 3 \, . \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{d^\sigma f(x)}{dx^\sigma} = \sin x = \sin(x + \sigma \, . \frac{\pi}{2})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \sin(x + n \, . \frac{\pi}{2}).$$

Contoh

Tentukan $\dfrac{d^3 f(x)}{dx^3}$ jika $f(x) = x^5 - 5x^2$

Jawab :

$$f(x) = x^5 - 5x^2 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 10x$$

$$f''(x) = 20x^3 - 10$$

$$f'''(x) = 60x^2$$

Latihan

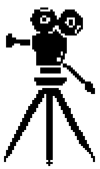
Tentukan $\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$ jika $f(x) = \sin x$

- Fungsi trigonometri (sinus dan cosinus) merupakan fungsi kontinu, sehingga limit fungsi sinus dan cosinus di setiap titik sama dengan nilai fungsinya, yaitu :

$$\lim_{x \to a} \sin x = \sin a$$

$$\lim_{x \to a} \cos x = \cos a$$

- Turunan sinus dan kosinus dapat diturunkan dari definisi yaitu sbb:



a. $y = \sin x \Rightarrow y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \dfrac{x + \Delta x - x}{2} \cos \dfrac{x + \Delta x + x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sin \dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \right) . \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

$$= 1.\ \cos(x + 0) = \cos x$$

Analog $y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$.

OR

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \lim_{t \to x} \frac{\sin t - \sin x}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{2\cos\frac{1}{2}(t+x)\ \sin\frac{1}{2}(t-x)}{2.\frac{1}{2}(t-x)}$$

$$= \left(\lim_{t \to x} \cos\tfrac{1}{2}(t+x)\right)\left(\lim_{t \to x} \frac{\sin\frac{1}{2}(t-x)}{\frac{1}{2}(t-x)}\right) = \cos x.$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = \lim_{t \to x} \frac{\cos t - \cos x}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{-2\sin\frac{1}{2}(t+x)\ \sin\frac{1}{2}(t-x)}{2.\frac{1}{2}(t-x)}$$

$$= -\left(\lim_{t \to x} \sin\tfrac{1}{2}(t+x)\right)\left(\lim_{t \to x} \frac{\sin\frac{1}{2}(t-x)}{\frac{1}{2}(t-x)}\right) = -\sin x.$$

b. $y = \tan x \Rightarrow y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ dengan mengingat $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$$\Rightarrow y' = \frac{\cos x - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Analog $y = \tan x \Rightarrow y' = \sec^2 x$

c. $y = \sec x \Rightarrow y = \dfrac{1}{\cos x}$

$$y' = \frac{0.\cos x - 1.(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$= \tan x \,.\, \sec x$$

Analog $y = \operatorname{cosec} x \Rightarrow y' = -\cot x \operatorname{cosec} x$.