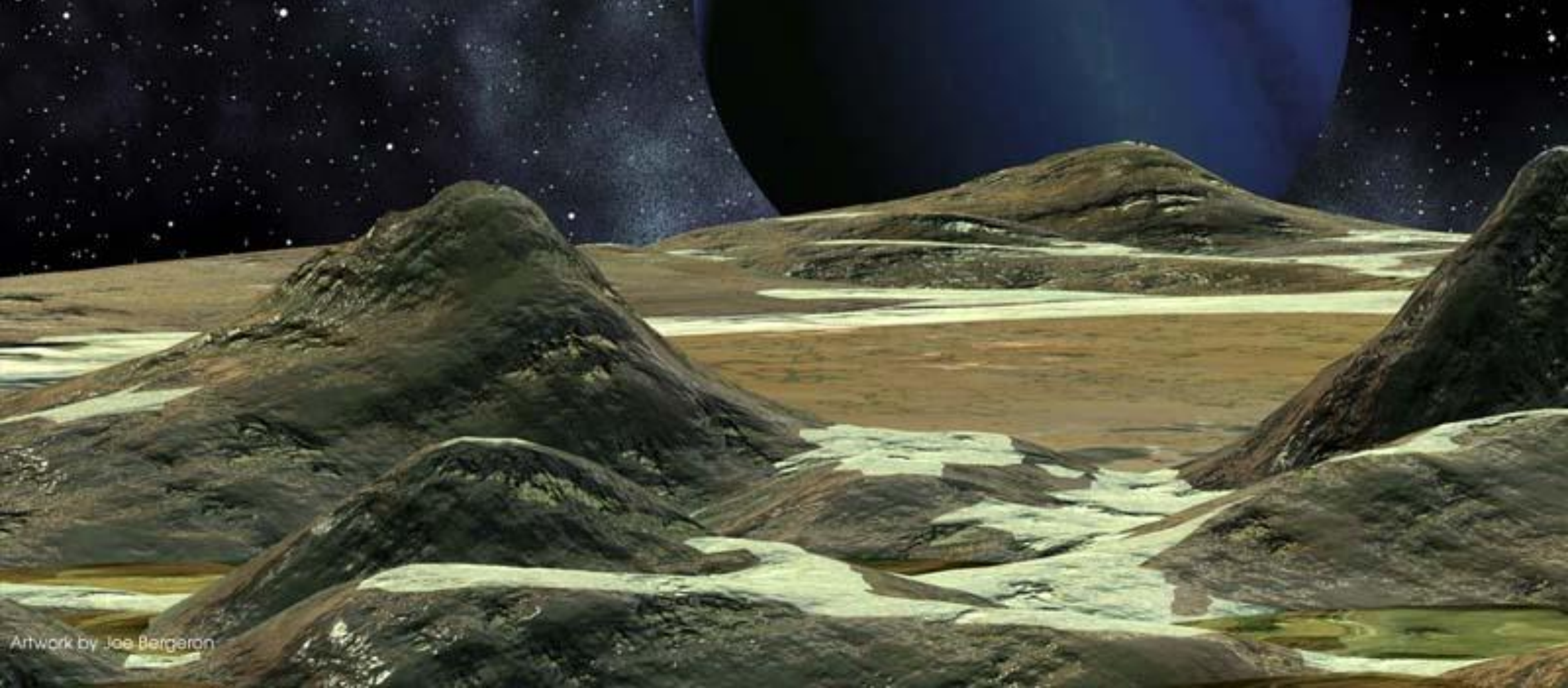
Pembelajaran

Matematika....

“ Dia yang menjadikan matahari dan bulan bercahaya, serta mengaturnya pada beberapa tempat, supaya kamu mengetahui bilangan tahun dan perhitunganya...”

(QS Yunus:5)



Pendahuluan Luas

Sifat :

- Luas daerah rata adalah bilangan riil tak negatif
- Lpersegipanjang=panjang x lebar (satuan sama)
- Daerah kongruen mempunyai luas yang sama
- Luas gabungan daerah yang hanya berimpit satu ruas garis = Luas kedua daerah
- Jk daerah 1 ada di daerah 2 maka Luas daerah daerah = Luas d2 kurang/samadg Luas d1

Beberapa jumlah khusus yang dibutuhkan dalam penghitungan Luas

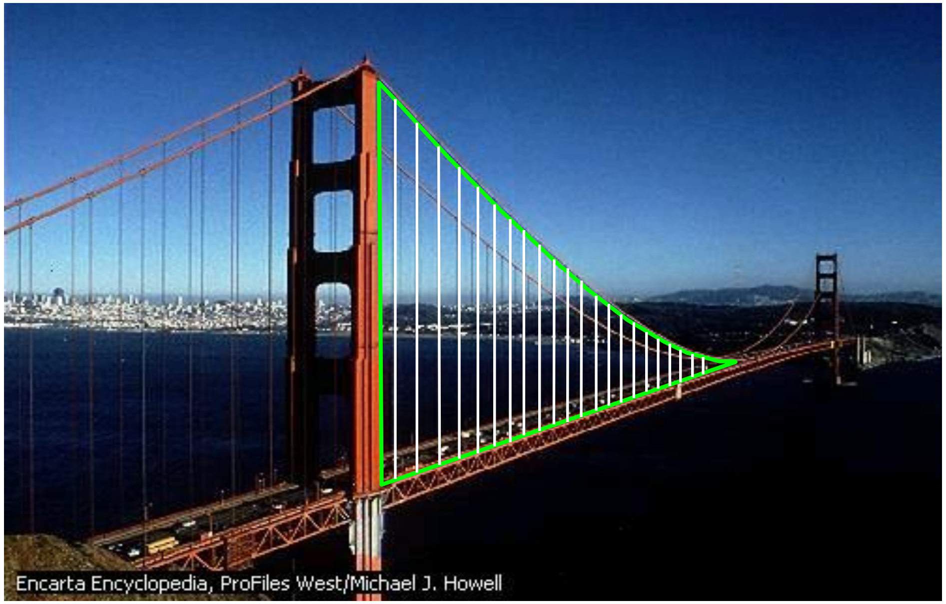
$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = 1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$$

Pendahuluan



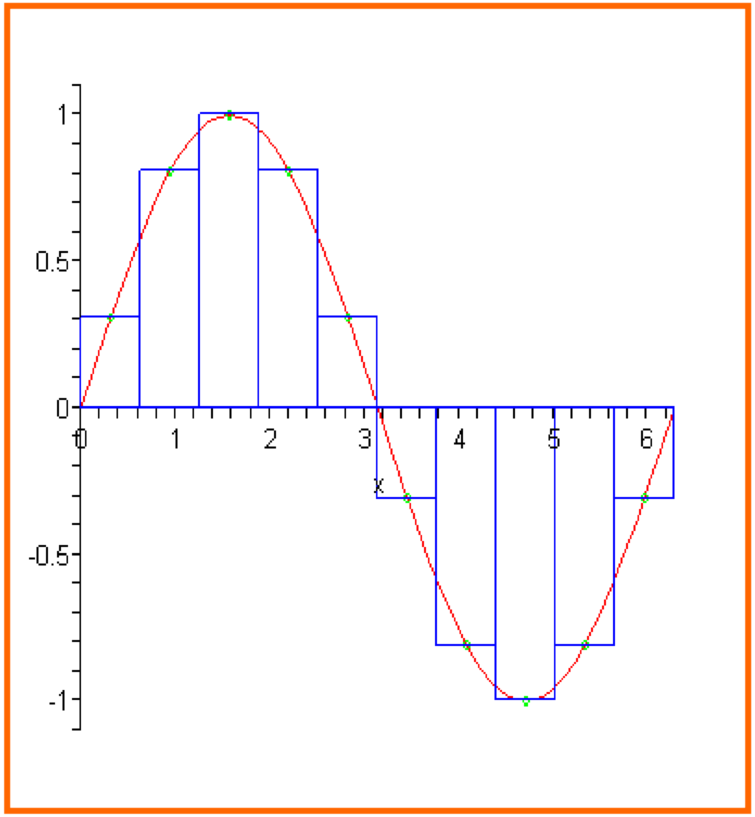
Pilar-pilar jembatan membentuk partisi-partisi yang akan dijadikan pijakan dalam menghitung luas daerah dengan menggunakan integral.

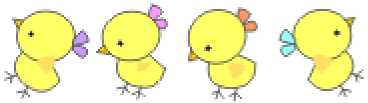
Luas sebagai limit

Menentukan luas daerah dengan *limit jumlah* dapat diilustrasikan oleh gambar di samping.

Langkah :

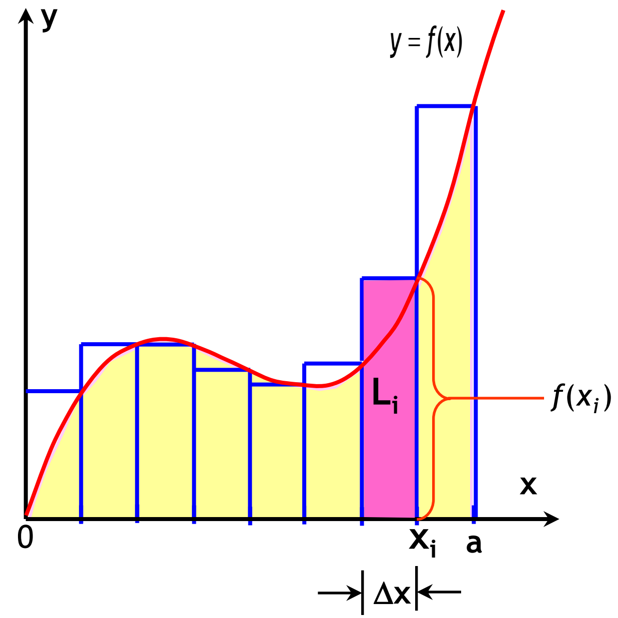
1) ***Partisi***
2) ***Aproksimasi,***
3) ***Jumlahkan dan***
4) ***Hitung limitnya.***



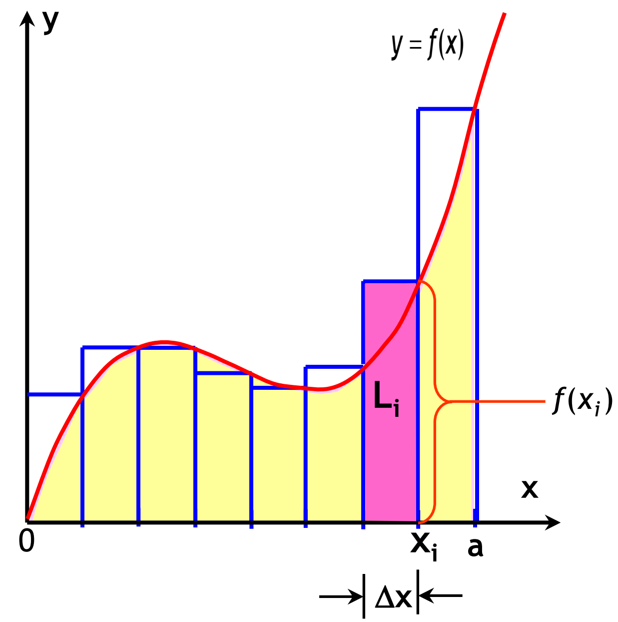


Langkah menghitung luas daerah dengan limit jumlah adalah:

1. **Bagilah interval menjadi selang yang sama panjang.**
2. **Partisilah daerah tersebut.**
3. **Masing-masing partisi buatlah persegi panjang.**
4. **Perhatikan persegi panjang pada interval $[x_{i-1}, x_i]$.**



5. Tentukan luas persegi panjang ke-i (L_i)
6. Jumlahkan luas semua persegi panjang
7. Hitung nilai limit jumlahnya



Luas sebuah persegi panjang: $L_i = f(x_i)\ \Delta x$

Jumlah luas persegi panjang :$L \approx \Sigma\ f(x_i)\ \Delta x$

Limit jumlah : $L = \lim \Sigma\ f(x_i)\ \Delta x \quad (n \to \infty)$

Contoh 1.

Tentukan luas daerah yag dibatasi oleh kurva $y = x^2$, sumbu X, dan garis x = 3 dengan menggunakan cara limit jumlah.

Jawab

Langkah penyelesaian:

1. Bagilah interval [0, 3] menjadi n buah selang yang sama panjang; yaitu 3/n.
2. Partisi daerah tersebut menurut persegi panjang luar.
3. Tentukan ukuran persegi panjang pada interval $[x_i , x_{i+1}]$ dan hitunglah luasnya.

   $x_0 = 0$

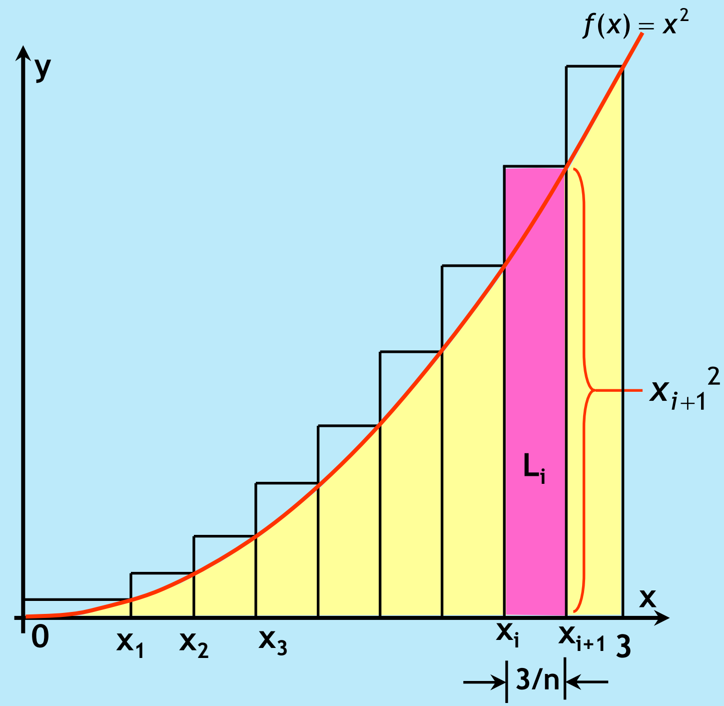
   $x_1 = 3/n$

   $x_2 = (3/n) \times 2 = 6/n$

   Jadi $x_i = 3i/n$ dan $x_{i+1} = 3(i+1)/n$

$$L_i = x_{i+1}^2 \times \frac{3}{n} = \left(\frac{3(i+1)}{n}\right)^2 \times \frac{3}{n}$$

$$L_i = \frac{27}{n^3}(i+1)^2$$



4. **Jumlahkan luas semua partisi**

$$L \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{27}{n^3}(i+1)^2$$

$$L \approx \frac{27}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right)$$

$$L \approx \frac{27}{n^3} \times \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$L \approx \frac{9}{2}(1+\tfrac{1}{n})(2+\tfrac{1}{n})$$

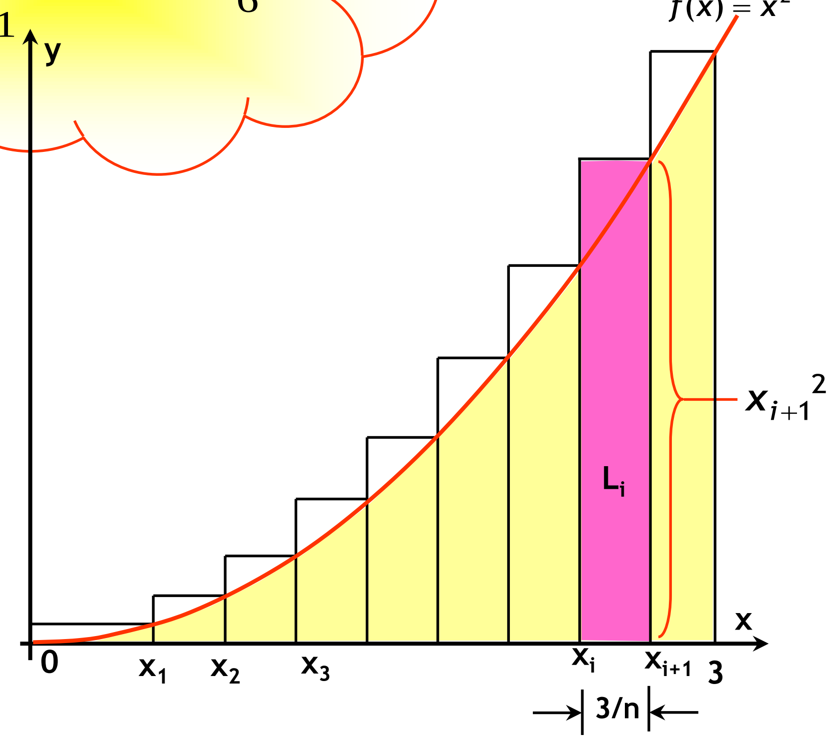
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

5. **Tentukan limitnya**

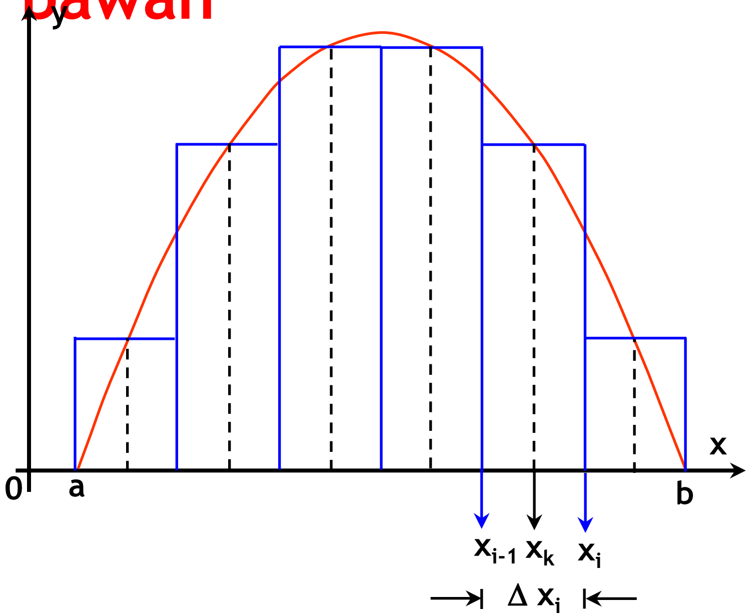
$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{2}(1+\tfrac{1}{n})(2+\tfrac{1}{n})$$

$$L = \frac{9}{2}(1+0)(2+0) = 9$$

Jadi luas daerah = 9 satuan



Perhatikan gambar di bawah



Misalkan selang [a, b] dibagi menjadi n bagian (lebar tidak harus sama) dengan lebar selang ke-i adalah $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Pada selang $[x_{i-1}, x_i]$ diambil titik sampel x_k maka jumlah Riemann dituliskan sebagai :

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, \Delta x_k$$

Selanjutnya didefinisikan bahwa:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, \Delta x_k$$

Bentuk $\int_a^b f(x)\, dx$

disebut dengan integral tertentu (Integral Riemann)

Teorema Dasar Kalkulus

Misalkan *f* adalah fungsi yang kontinyu pada selang [a, b] dan misalkan F adalah anti turunan dari *f* pada selang tersebut, maka berlaku :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Untuk meringkas penulisan, F(*b*) - F(*a*) dinotasikan sebagai $\left[F(x)\right]_a^b$

Contoh 2.

Hitunglah nilai dari $\int_{-1}^{2} \left(6x^2 - 4x\right) dx$

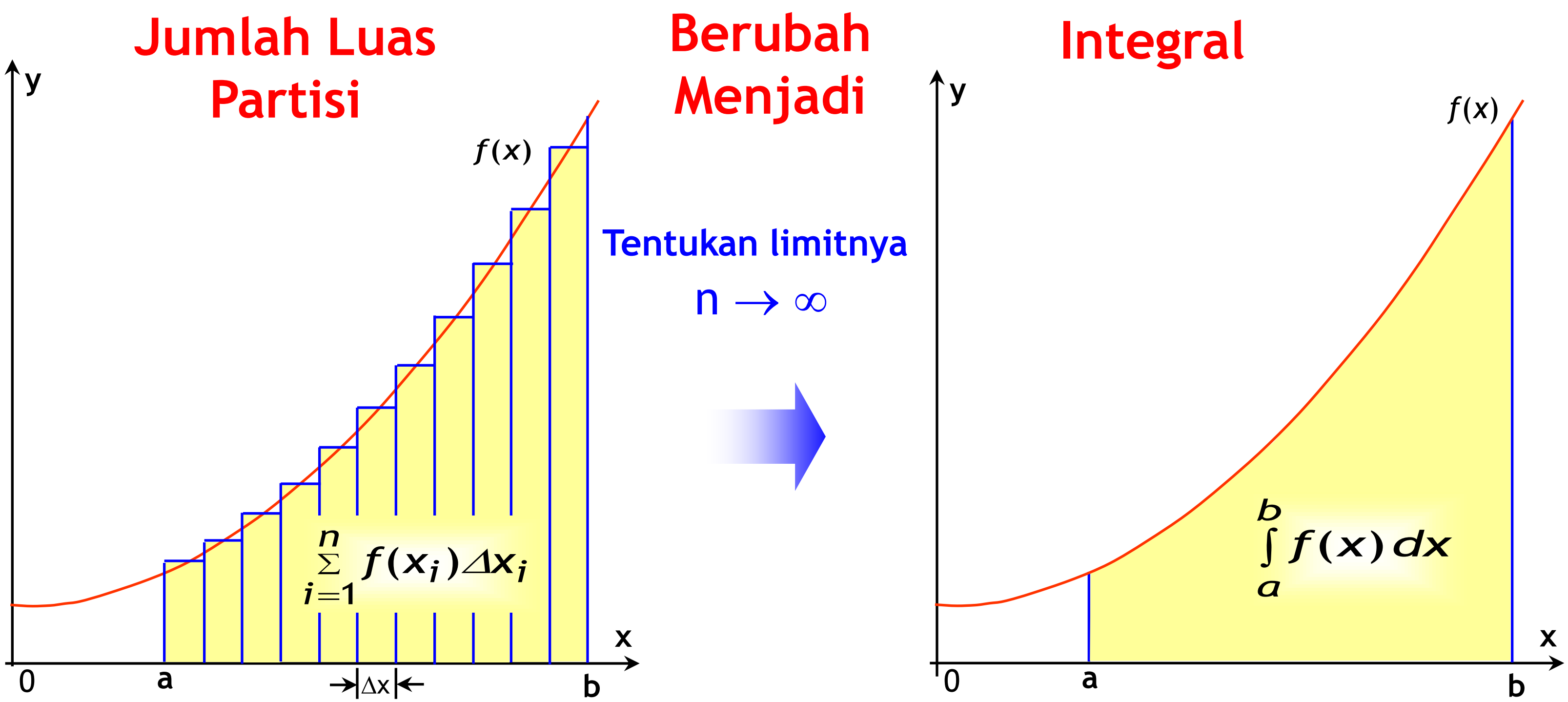
Jawab

$$\int_{-1}^{2} \left(6x^2 - 4x\right) dx = \left[2x^3 - 2x^2\right]_{-1}^{2}$$

$$= 2(2)^3 - 2(2)^2 - [2(-1)^3 - 2(-1)^2]$$

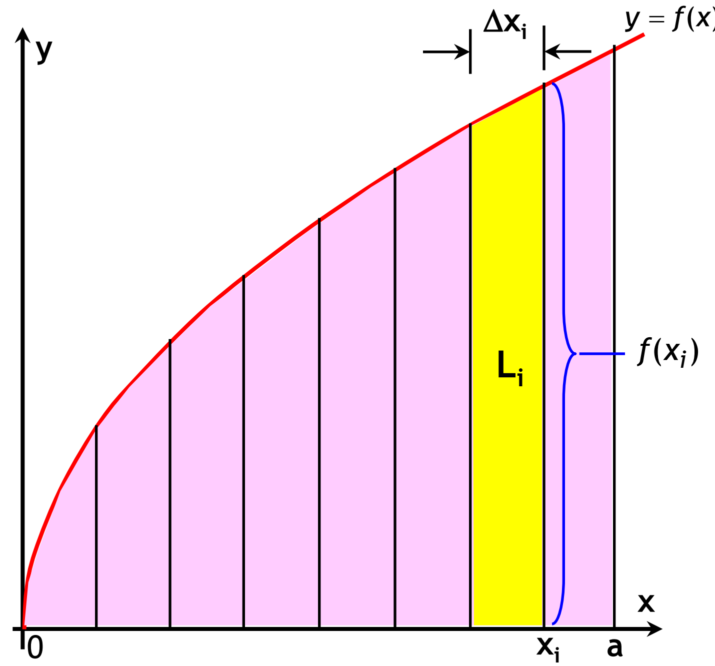
$$= 16 - 8 + 2 - 2 = 8$$

Secara geometri definisi integral Riemaan di atas dapat diartikan sebagai luas daerah di bawah kurva $y = f(x)$ pada interval [a, b].



$$L = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$$

Menghitung Luas dengan Integral



Kegiatan pokok dalam menghitung luas daerah dengan integral tentu adalah:

1. **Gambar daerahnya.**
2. **Partisi daerahnya**
3. **Aproksimasi luas sebuah partisi**

   $L_i \approx f(x_i)\,\Delta x_i$

4. **Jumlahkan luas partisi**

   $L \approx \sum f(x_i)\,\Delta x_i$ $\quad\quad$ $L = \int_0^a f(x)\,dx$

5. **Ambil limitnya** $L = \lim \sum f(x_i)\,\Delta x_i$
6. **Nyatakan dalam integral**

Menghitung Luas dengan Integral

Contoh 3.

Hitunglah luas daerah tertutup yang dibatasi kurva $y = x^2$, sumbu x, dan garis $x = 3$

Jawab

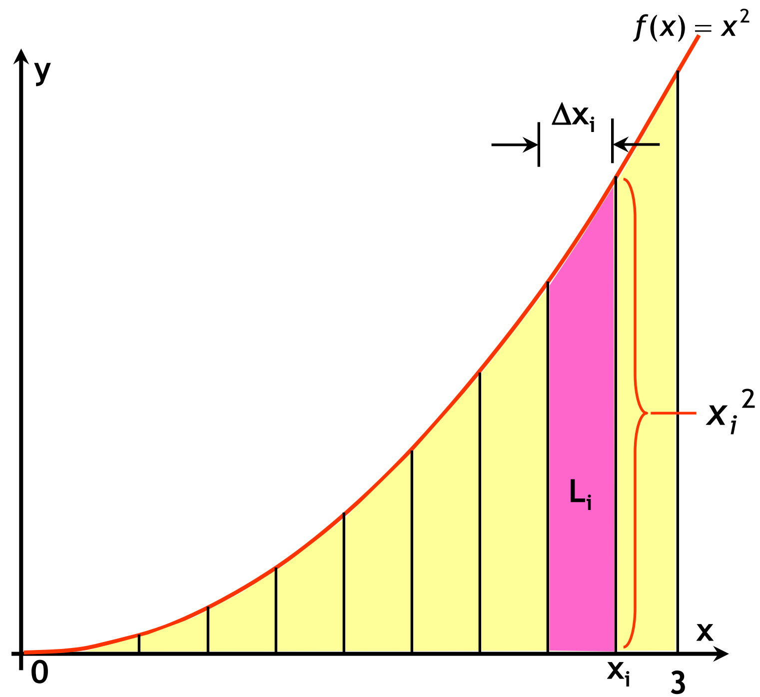
Langkah penyelesaian :

1. Gambarlah daerahnya
2. Partisi daerahnya
3. Aproksimasi luasnya $L_i \approx x_i^2 \, \Delta x_i$
4. Jumlahkan luasnya $L \approx \sum x_i^2 \, \Delta x_i$
5. Ambil limit jumlah luasnya

   $L = \lim \sum x_i^2 \, \Delta x_i$
6. Nyatakan dalam integral dan hitung nilainya

$$L = \int_0^3 x^2 \, dx$$

$$L = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{3^3}{3} - 0 = 9$$



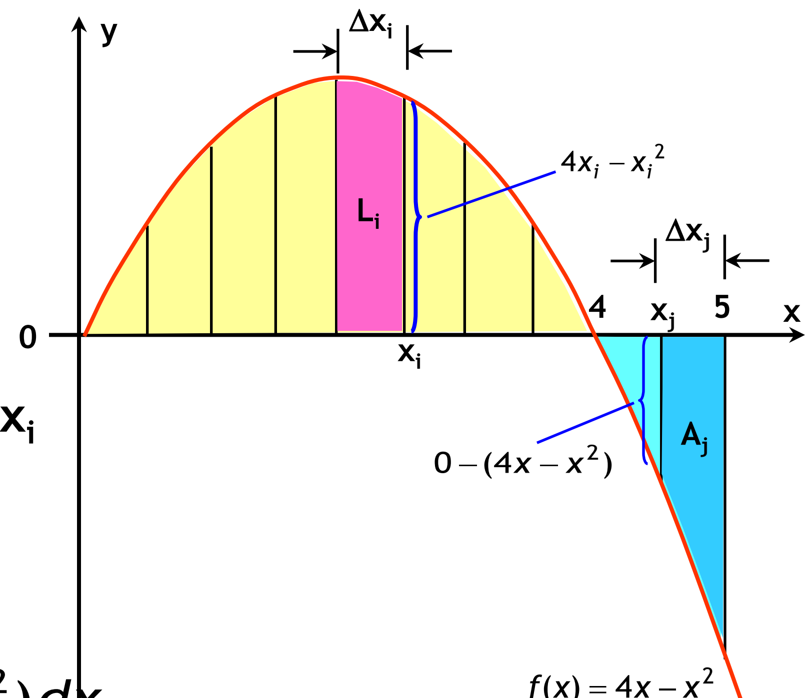
Contoh 4.

Hitunglah luas daerah tertutup yang dibatasi kurva $y = 4x - x^2$, sumbu x, dan garis $x = 5$

Jawab

Langkah penyelesaian:

1. Gambar dan Partisi daerahnya
2. Aproksimasi : $L_i \approx (4x_i - x_i^2)\Delta x_i$ dan
   $A_j \approx -(4x_j - x_j^2)\Delta x_j$
4. Jumlahkan : $L \approx \sum(4x_i - x_i^2)\Delta x_i$ dan
   $A \approx \sum -(4x_j - x_j^2)\Delta x_j$
5. Ambil limitnya $L = \lim \sum (4x_i - x_i^2)\Delta x_i$
   dan $A = \lim \sum -(4x_j - x_j^2)\Delta x_j$
6. Nyatakan dalam integral



$$L = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx \qquad A = \int_4^5 -(4x - x^2)\,dx$$

$$L = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx$$

$$L = \left[2x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^4$$

$$L = 2(4)^2 - \tfrac{1}{3}(4)^3 - 0 = 32 - \tfrac{64}{3}$$

$$A = \int_4^5 -(4x - x^2)\,dx$$

$$A = \left[-2x^2 + \tfrac{1}{3}x^3\right]_4^5$$

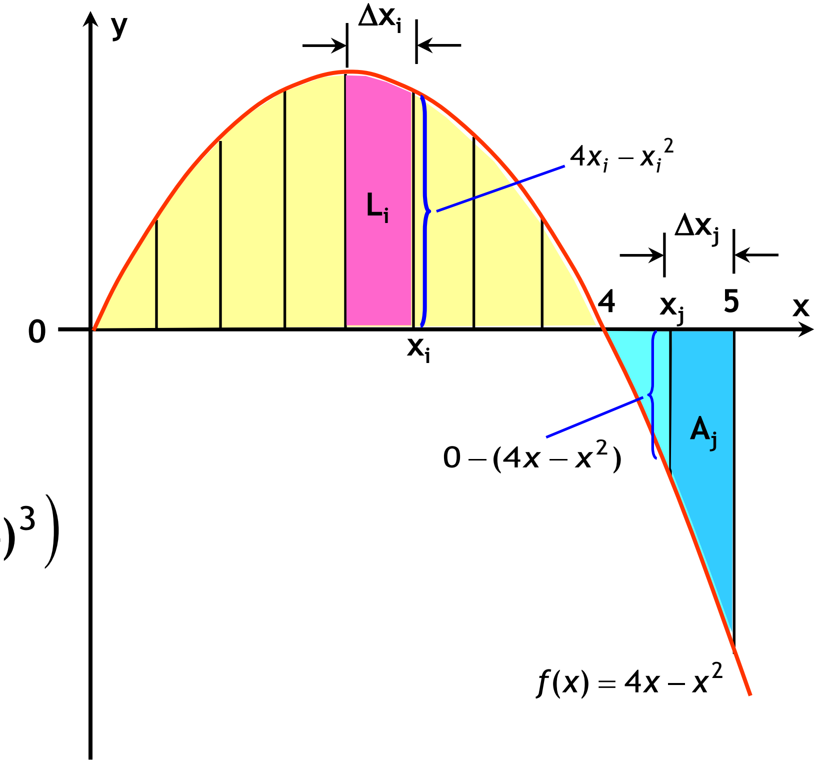
$$A = -2(5)^2 + \tfrac{1}{3}(5)^3 - \left(-2(4)^2 + \tfrac{1}{3}(4)^3\right)$$

$$A = -50 + \tfrac{125}{3} + 32 - \tfrac{64}{3}$$

$$A = \tfrac{61}{3} - 18$$

$$\text{Luas daerah} = 32 - \tfrac{64}{3} + \tfrac{61}{3} - 18$$

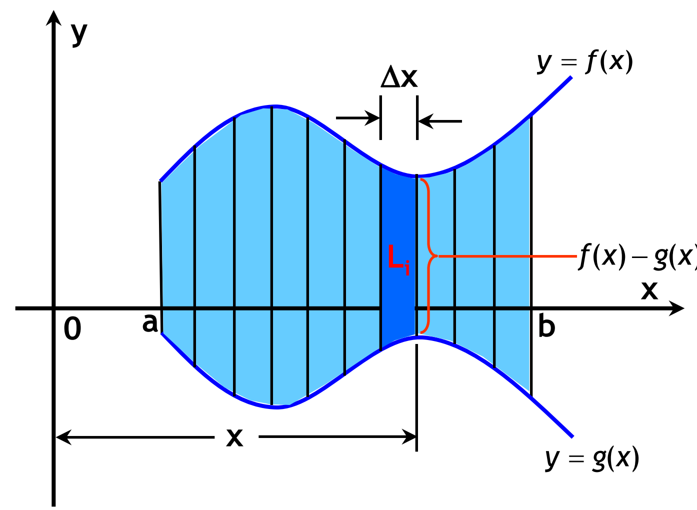
$$\text{Luas daerah} = 13$$



LUAS DAERAH ANTARA DUA KURVA

Perhatikan kurva y = $f(x)$ dan $y = g(x)$ dengan $f(x) > g(x)$ pada selang [a, b] di bawah ini. Dengan menggunakan cara : *partisi*, *aproksimasi*, *jumlahkan*, *ambil limitnya*, *integralkan*, maka dapat ditentukan luas daerah antara dua kur*va* tersebut.

Langkah penyelesaian:



1. Partisi daerahnya
2. Aproksimasi : $L_i \approx [\, f(x) - g(x)\,]\, \Delta x$
4. Jumlahkan : $L \approx \sum [\, f(x) - g(x)\,]\, \Delta x$
5. Ambil limitnya :

   $L = \lim \sum [\, f(x) - g(x)\,]\, \Delta x$
6. Nyatakan dalam integral tertentu

$$L = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

Contoh 5.

Hitunglah luas daerah tertutup yang dibatasi kurva $y = x^2$ dan garis $y = 2 - x$

Jawab

1. Gambar daerahnya
2. Tentukan titik potong kedua kurva

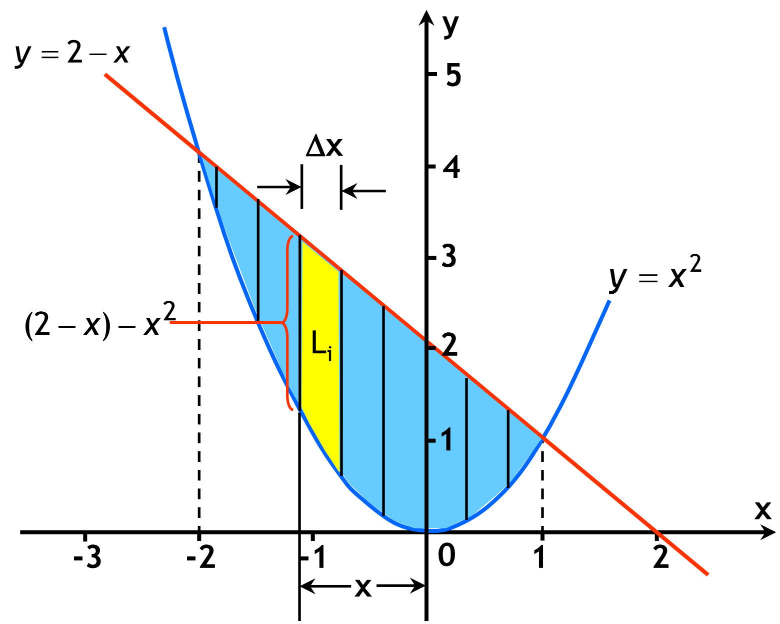
   $x^2 = 2 - x \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0$

   diperoleh x = -2 dan x = 1
3. Partisi daerahnya
4. Aproksimasi luasnya

   $L_i \approx (2 - x - x^2)\Delta x$
4. Jumlahkan luasnya

   $L \approx \sum (2 - x - x^2)\Delta x$
5. Tentukan limit jumlah luasnya

   $L = \lim \sum (2 - x - x^2)\Delta x$
6. Nyatakan dalam integral tertentu



$$L = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)\, dx$$

$$L = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)\, dx$$

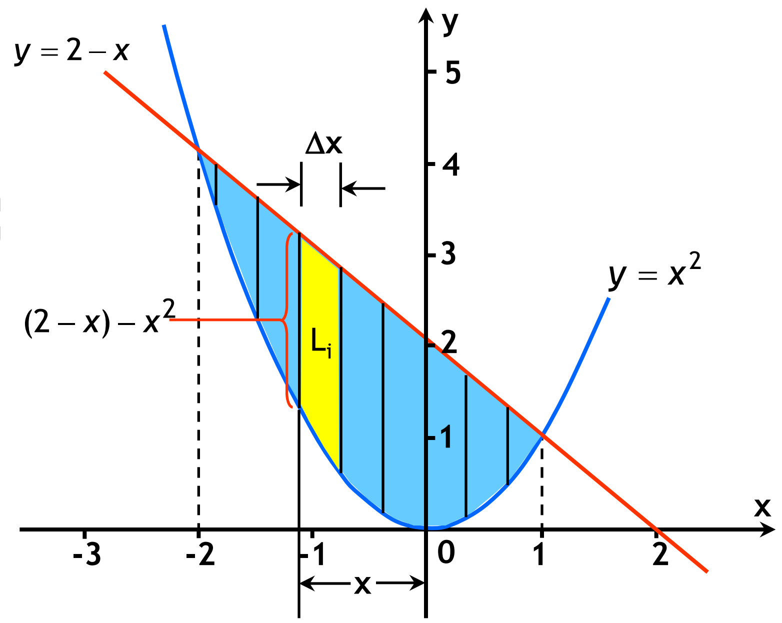
$$L = \left[2x - \frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{1}$$

$$L = \left(2(1) - \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right) - \left(2(-2) - \frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3} \right)$$

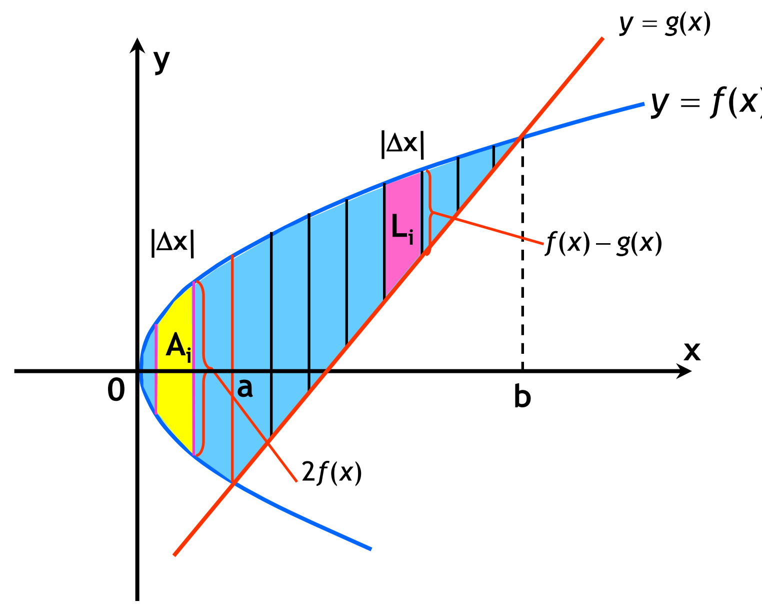
$$L = \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3} \right)$$

$$L = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 4 + 2 - \frac{8}{3}$$

$$L = 5 - \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$$

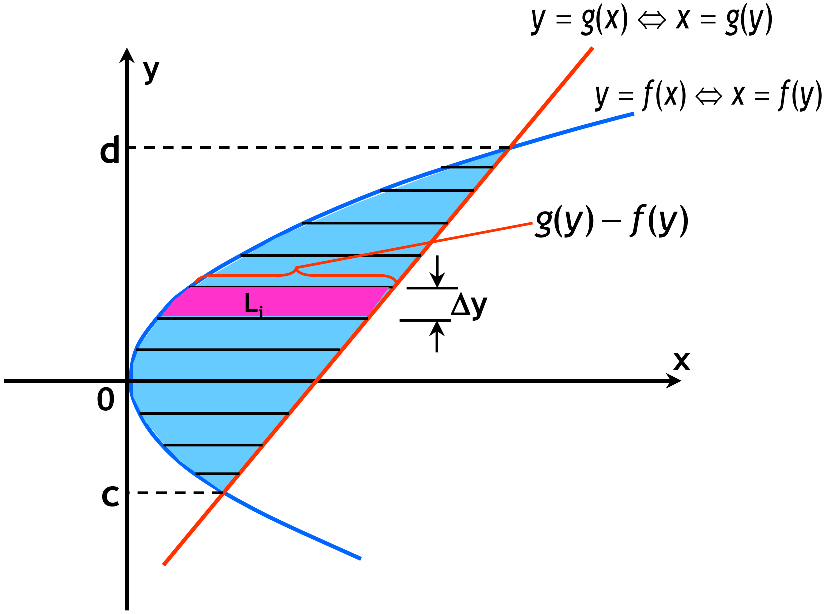


Untuk kasus tertentu pemartisian secara vertikal menyebabkan ada dua bentuk integral. Akibatnya diperlukan waktu lebih lama untuk menghitungnya.



$$\text{Luas daerah} = \int_0^a 2f(x)\,dx + \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

Jika daerah tersebut dipartisi secara horisontal, maka akan diperoleh satu bentuk integral yang menyatakan luas daerah tersebut. Sehingga penyelesaiannya menjadi lebih sederhana dari sebelumnya.



Luas daerah = $\int_{c}^{d} (g(y) - f(y))\,dy$

Contoh 6.

Hitunglah luas daerah yang dibatasi kurva $y^2 = x$, garis $x + y = 6$, dan sumbu x

Jawab

1. Gambar daerahnya
2. Tentukan titik potong kedua kurva

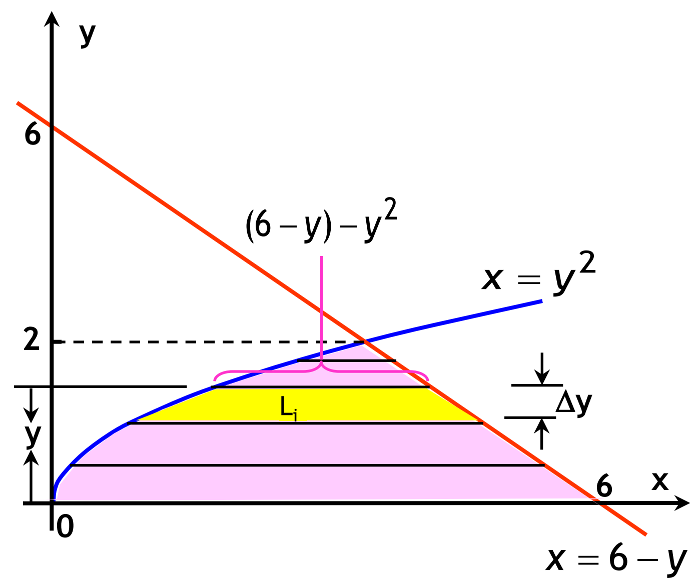
   $y^2 = 6 - y \rightarrow y^2 + y - 6 = 0 \rightarrow (y + 3)(y - 2) = 0$

   diperoleh y = - 3 dan y = 2
3. Partisi daerahnya
4. Aproksimasi luasnya

   $L_i \approx (6 - y - y^2)\Delta y$
4. Jumlahkan luasnya

   $L \approx \sum (6 - y - y^2)\Delta y$
5. Tentukan limitnya

   $L = \lim \sum (6 - y - y^2)\Delta y$
6. Nyatakan dalam integral tertentu



Luas daerah = $\int_0^2 \left(6 - y - y^2\right)dy$

Luas daerah = $\int_0^2 \left(6 - y - y^2\right) dy$

Luas daerah = $\left[6y - \frac{y}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^2$

Luas daerah = $\left(6(2) - \frac{2}{2} - \frac{2^3}{3}\right) - 0$

Luas daerah = $\left(12 - 1 - \frac{8}{3}\right)$

Luas daerah = $\frac{25}{3}$