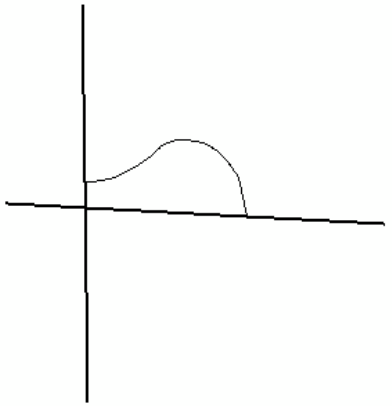
Bab 3
Bagian 3
VOLUME BENDA PUTAR

INTRODUCTION

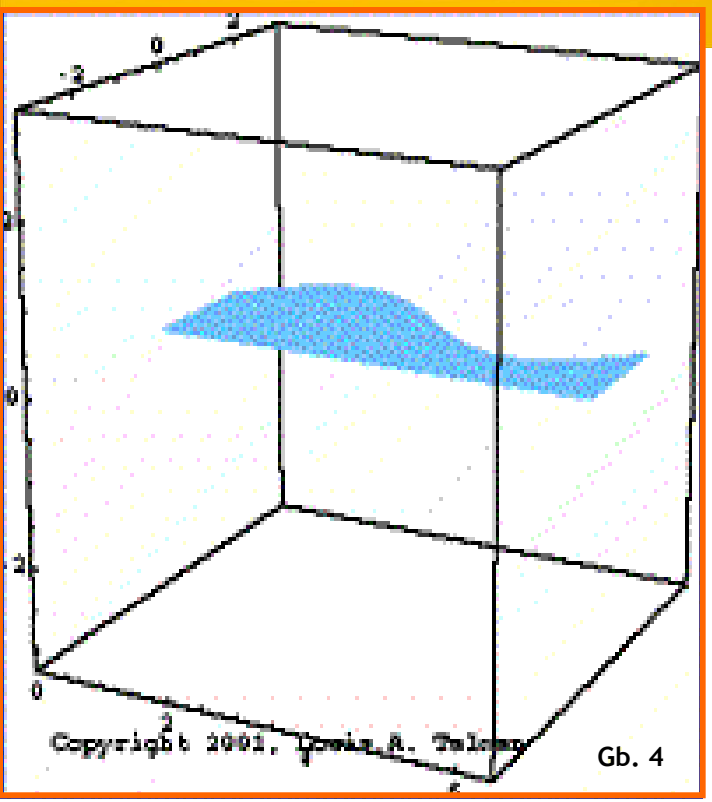
•Bola lampu di samping dapat dipandang sebagai benda putar jika kurva di atasnya diputar menurut garis horisontal.



•Pada pokok bahasan ini akan dipelajari juga penggunaan integral untuk menghitung volume benda putar.

Suatu daerah jika di putar mengelilingi garis tertentu sejauh 360°, maka akan terbentuk suatu benda putar. Kegiatan pokok dalam menghitung volume benda putar dengan integral adalah:

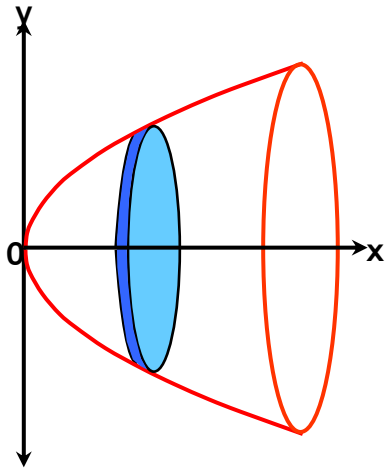
1. *Partisi*,
2. *Aproksimasi*,
3. *Jumlahkan*,
4. *Ambil limitnya*
5. *Nyatakan dalam integral tentu.*

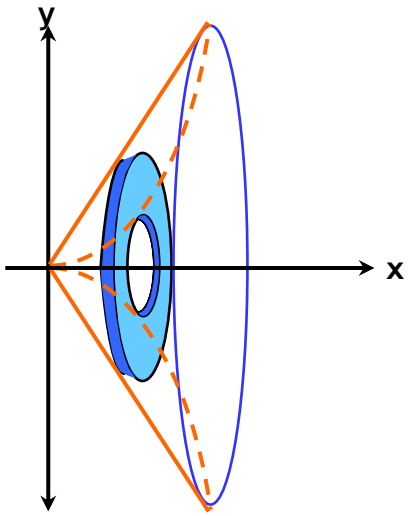


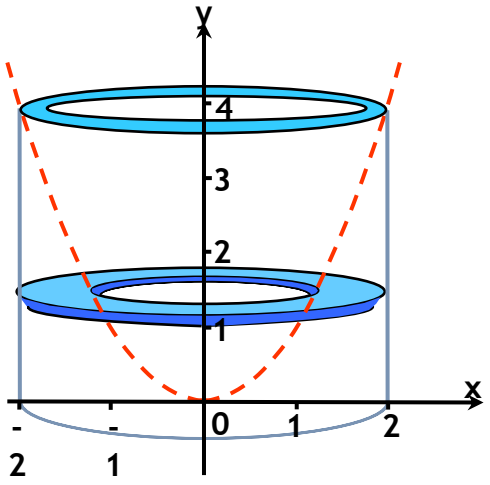
Gb. 4

Dalam menentukan volume benda putar yang harus diperhatikan adalah bagaimana bentuk sebuah partisi jika diputar. Berdasarkan bentuk partisi tersebut, maka metode yang digunakan untuk menentukan volume benda putar dibagi menjadi :

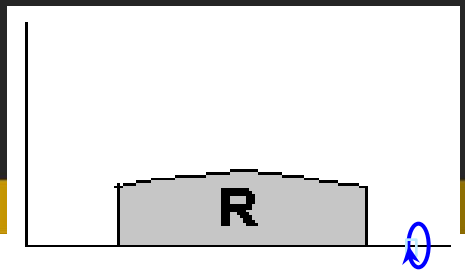
1. Metode cakram
2. Metode cincin
3. Metode kulit tabung



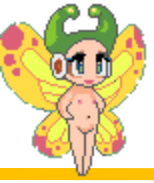




Metode Cakram



Metode cakram yang digunakan dalam menentukan volume benda putar dapat dianalogikan seperti menentukan volume mentimun dengan memotong-motongnya sehingga tiap potongan berbentuk cakram.



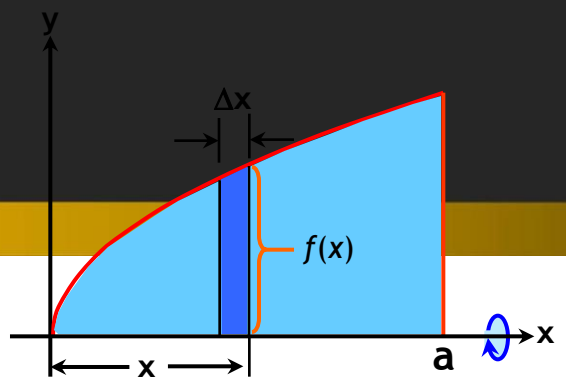
Bentuk cakram di samping dapat dianggap sebagai tabung dengan jari-jari r = f(x), tinggi h = Δx. Sehingga volumenya dapat diaproksimasi sebagai $\Delta V \approx \pi r^2 h$ atau $\Delta V \approx \pi\, f(x)^2 \Delta x$.

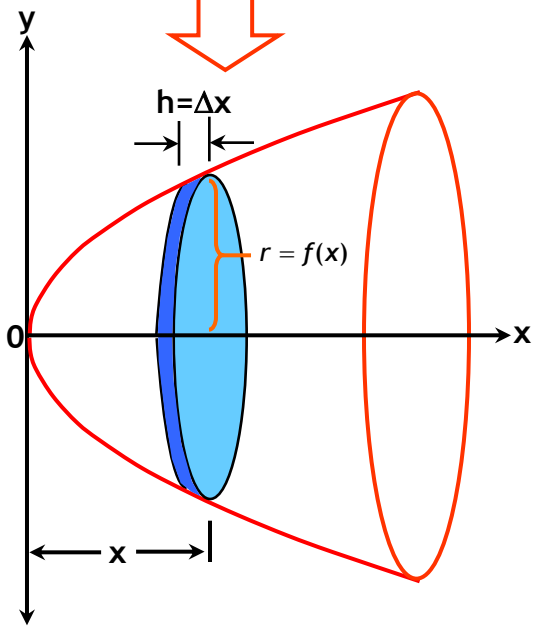
Dengan cara jumlahkan, ambil limitnya, dan nyatakan dalam integral diperoleh:

$$V \approx \sum \pi\, f(x)^2\, \Delta x$$

$$V = \lim \sum \pi\, f(x)^2\, \Delta x$$

$$V = \pi \int_0^a [f(x)]^2 dx$$



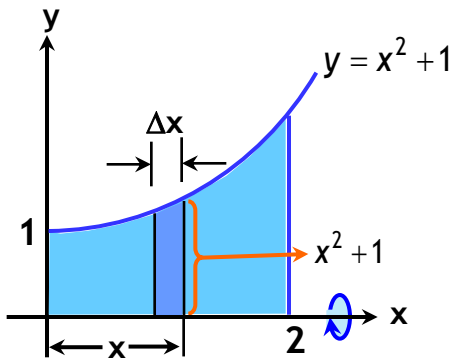


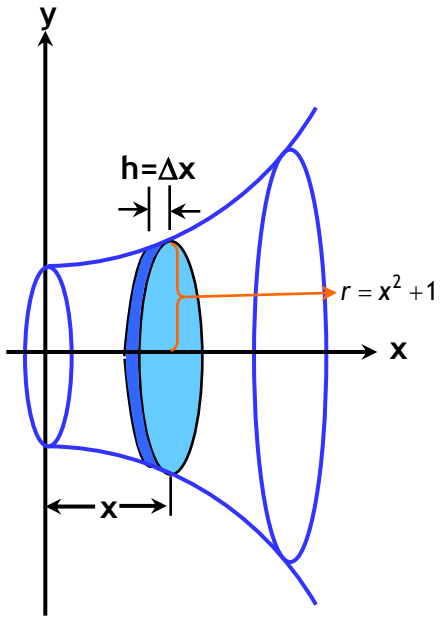
Contoh 7.

Hitunglah volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva $y = x^2 + 1$, sumbu x, sumbu y, garis $x = 2$ diputar mengelilingi sumbu x sejauh 360°.

Jawab

1. Gambarlah daerahnya
2. Buat sebuah partisi
3. Tentukan ukuran dan bentuk partisi
4. Aproksimasi volume partisi yang diputar, jumlahkan, ambil limitnya, dan nyatakan dalam bentuk integral.





$\Delta V \approx \pi r^2 h$

$\Delta V \approx \pi(x^2 + 1)^2 \Delta x$

$V \approx \sum \pi(x^2 + 1)^2 \Delta x$

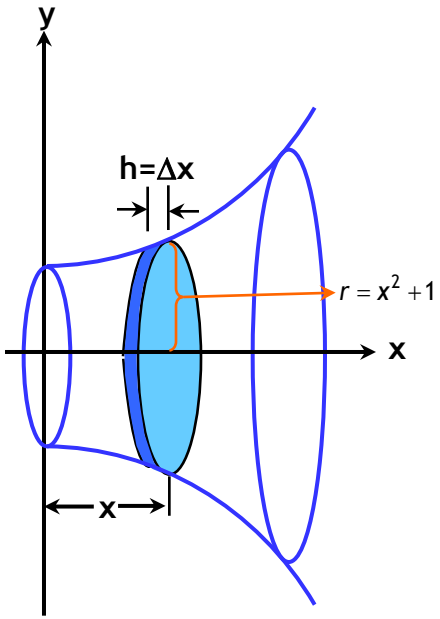
$V = \lim \sum \pi(x^2 + 1)^2 \Delta x$

$$V = \int_0^2 \pi(x^2 + 1)^2 dx$$

$$V = \int_0^2 \pi(x^4 + 2x^2 + 1) dx$$

$$V = \pi\left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x\right]_0^2$$

$$V = \pi\left(\frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 2 - 0\right) = 13\frac{11}{15}\pi$$

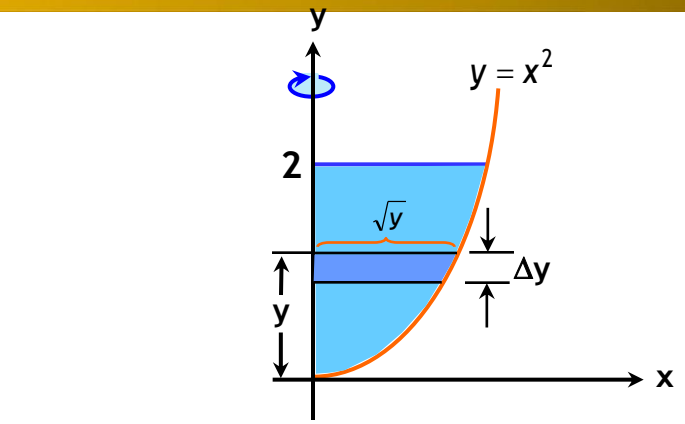


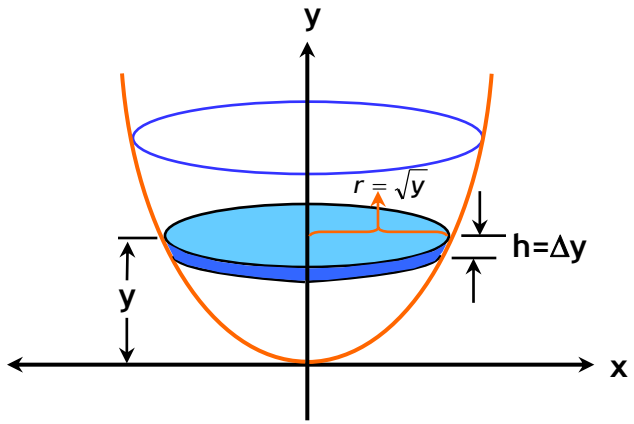
Contoh 8.

Hitunglah volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva $y = x^2$, sumbu y, garis $y = 2$ diputar mengelilingi sumbu y sejauh 360°.

Jawab

1. Gambarlah daerahnya
2. Buatlah sebuah partisi
3. Tentukan ukuran dan bentuk partisi
4. Aproksimasi volume partisi yang diputar, jumlahkan, ambil limitnya, dan nyatakan dalam bentuk integral.





$\Delta V \approx \pi r^2 h$

$\Delta V \approx \pi(\sqrt{y})^2 \, \Delta y$

$V \approx \sum \pi y \, \Delta y$

$V = \lim \sum \pi y \, \Delta y$

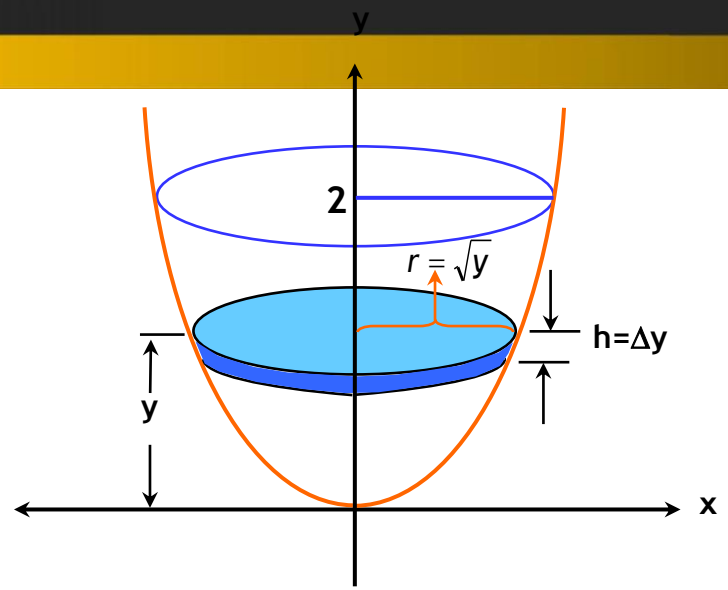
$$V = \int_0^2 \pi y \, dy$$

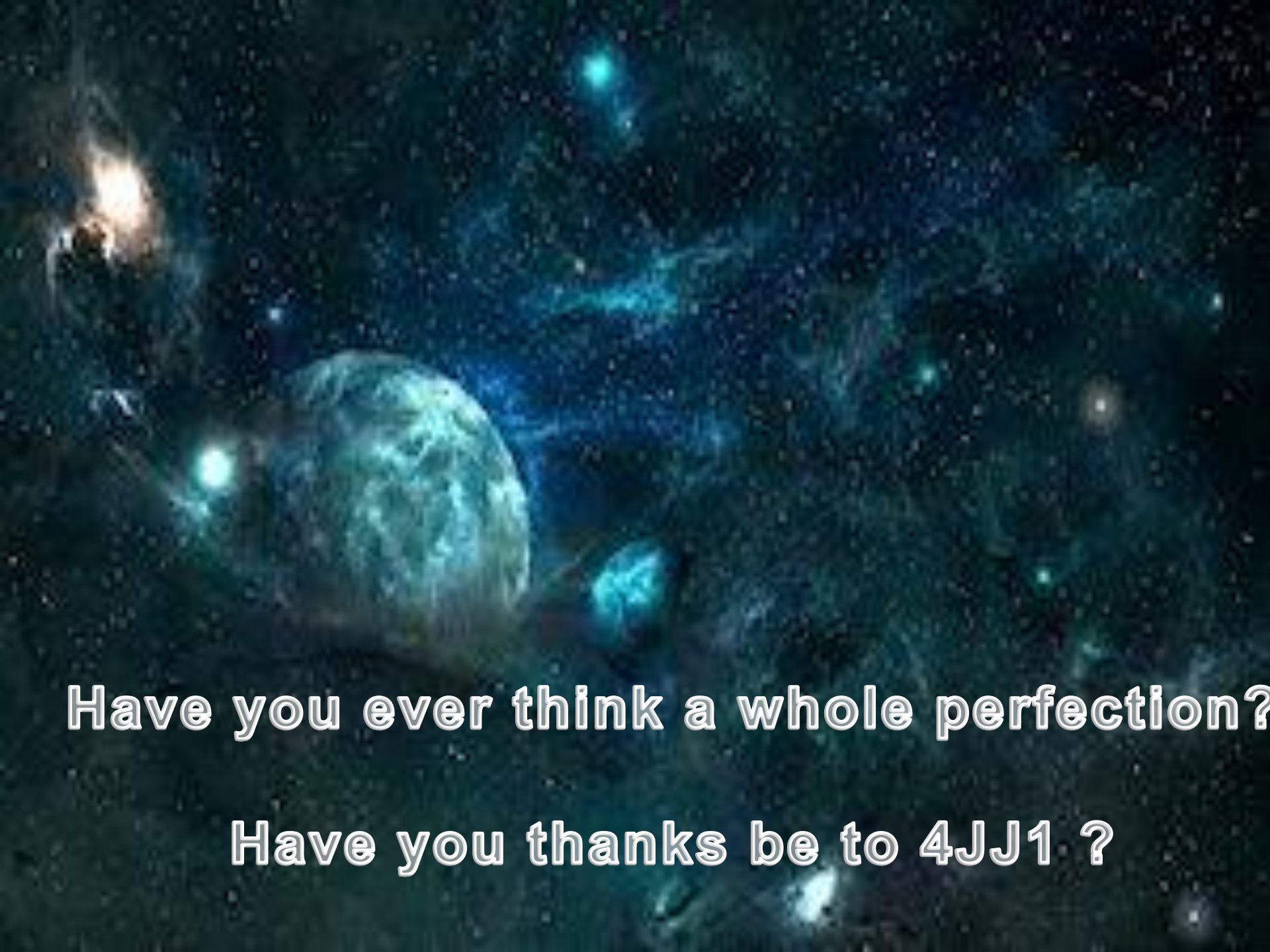
$$V = \pi \int_0^2 y \, dy$$

$$V = \pi \left[\tfrac{1}{2} y^2 \right]_0^2$$

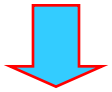
$$V = \pi\left(\tfrac{1}{2} \times 4 - 0\right)$$

$$V = 2\pi$$



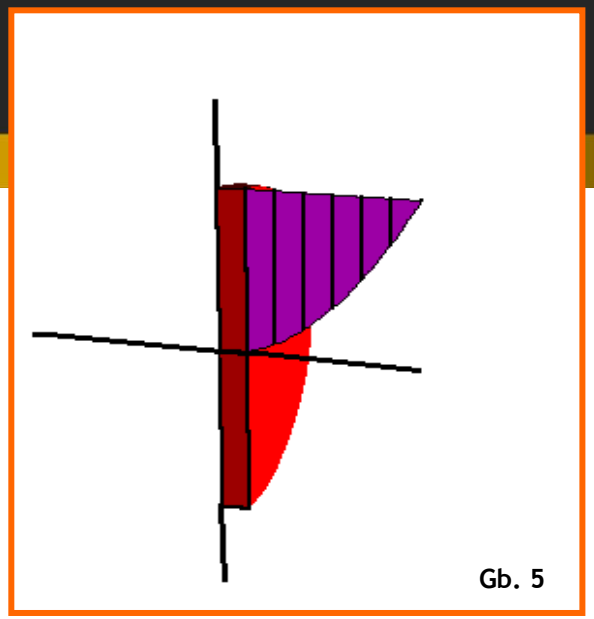

Have you ever think a whole perfection?
Have you thanks be to 4JJ1 ?

Metode Cincin

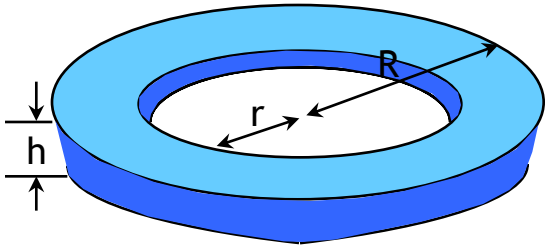


Metode cincin yang digunakan dalam menentukan volume benda putar dapat dianalogikan seperti menentukan volume bawang bombay dengan memotong-motongnya yang potongannya berbentuk cincin.

Menghitung volume benda putar dengan menggunakan metode cincin dilakukan dengan memanfaatkan rumus volume cincin seperti gambar di samping, yaitu $V = \pi(R^2 - r^2)h$



Gb. 5

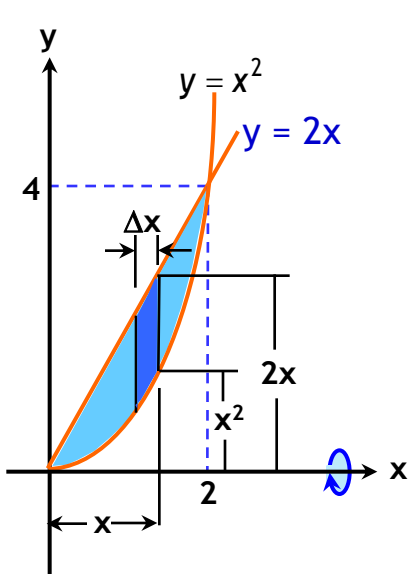


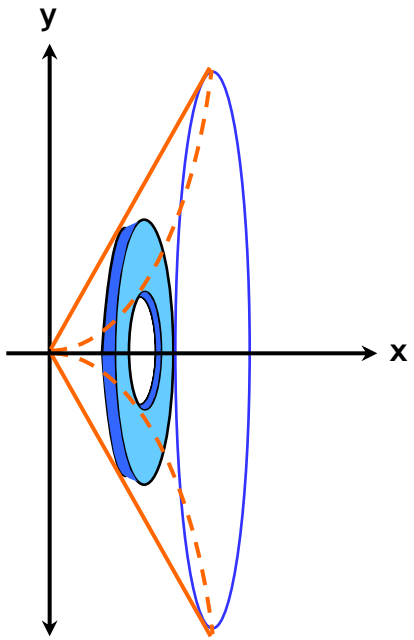
Contoh 9.

Hitunglah volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva $y = x^2$ dan garis $y = 2x$ diputar mengelilingi sumbu x sejauh 360°.

Jawab

1. Gambarlah daerahnya
2. Buat sebuah partisi
3. Tentukan ukuran dan bentuk partisi
4. Aproksimasi volume partisi yang diputar, jumlahkan, ambil limitnya, dan nyatakan dalam bentuk integral.





$\Delta V \approx \pi(R^2 - r^2)\, h$

$\Delta V \approx \pi\,[\,(2x)^2 - (x^2)^2\,]\,\Delta x$

$\Delta V \approx \pi\,(4x^2 - x^4)\,\Delta x$

$V \approx \sum \pi\,(4x^2 - x^4)\,\Delta x$

$V = \lim \sum \pi\,(4x^2 - x^4)\,\Delta x$

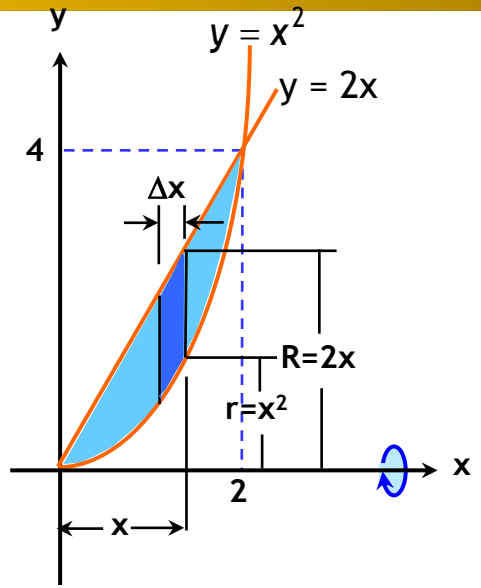
$$V = \pi \int_0^2 (4x^2 - x^4)\,dx$$

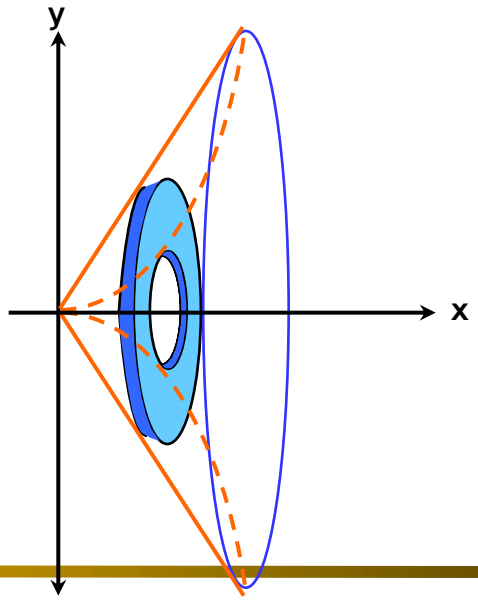
$$V = \pi\left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^2$$

$$V = \pi\left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right)$$

$$V = \pi\left(\frac{160-96}{15}\right)$$

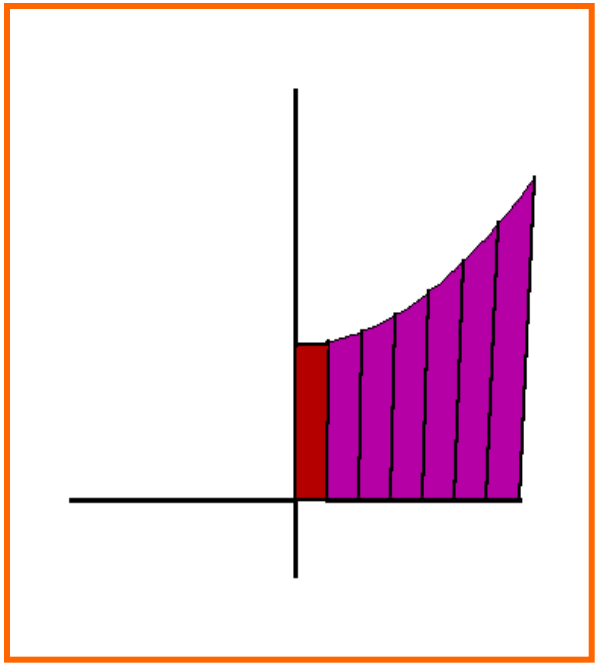
$$V = \frac{64}{15}\pi$$

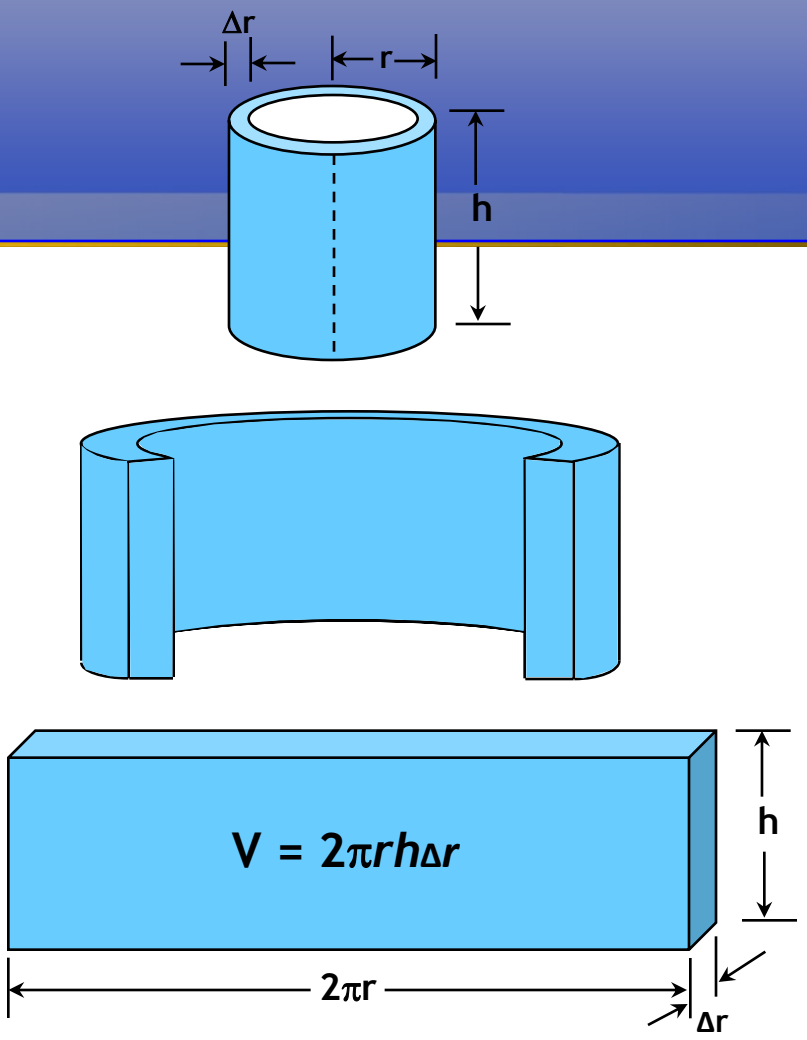




Metode Kulit Tabung

Metode kulit tabung yang digunakan untuk menentukan volume benda putar dapat dianalogikan seperti menentukan volume roti pada gambar disamping.



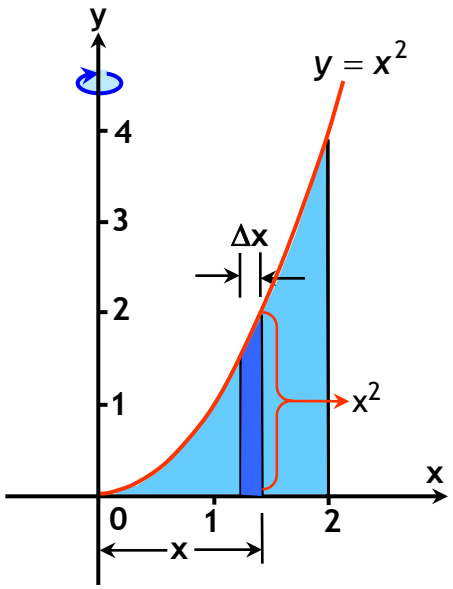

Δr
r
h
V = 2πrhΔr
h
2πr
Δr

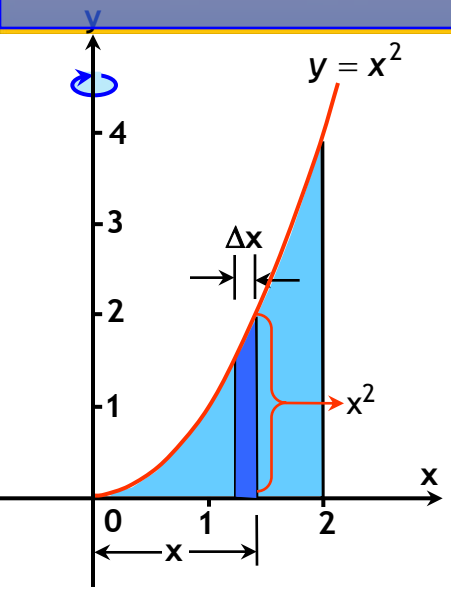
Contoh 10.

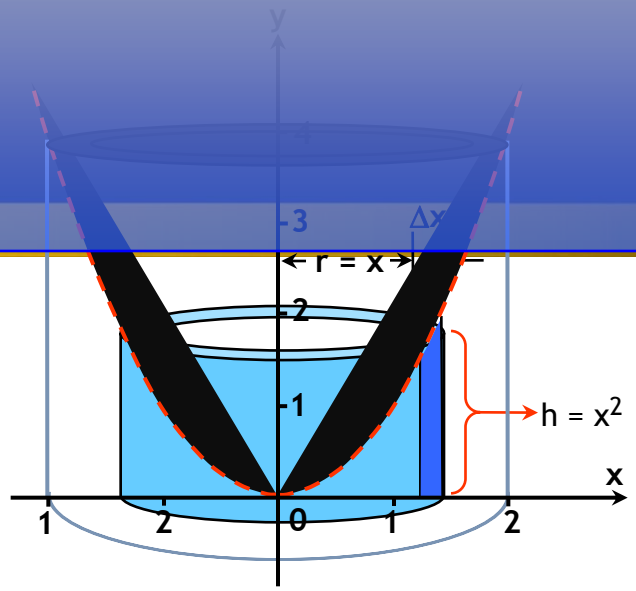
Hitunglah volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva $y = x^2$, garis $x = 2$, dan sumbu x diputar mengelilingi sumbu y sejauh 360°.

Jawab

1. Gambarlah daerahnya
2. Buatlah sebuah partisi
3. Tentukan ukuran dan bentuk partisi.
4. Aproksimasi volume partisi yang diputar, jumlahkan, ambil limitnya, dan nyatakan dalam bentuk integral.







$\Delta V \approx 2\pi rh\Delta x$

$\Delta V \approx 2\pi(x)(x^2)\Delta x$

$V \approx \sum 2\pi x^3 \Delta x$

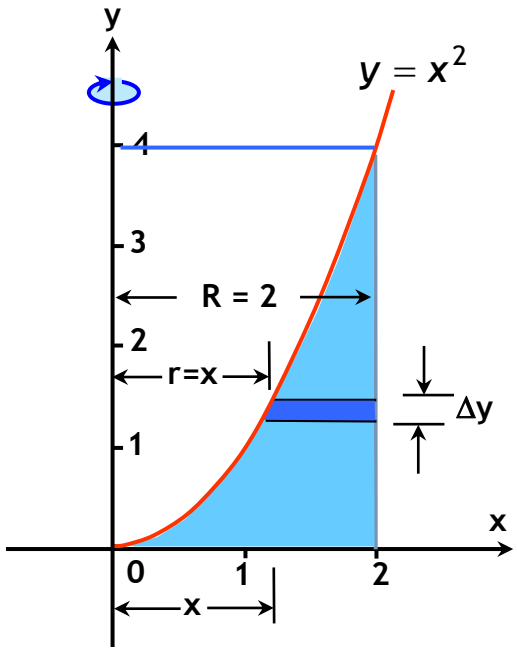
$V = \lim \sum 2\pi x^3 \Delta x$

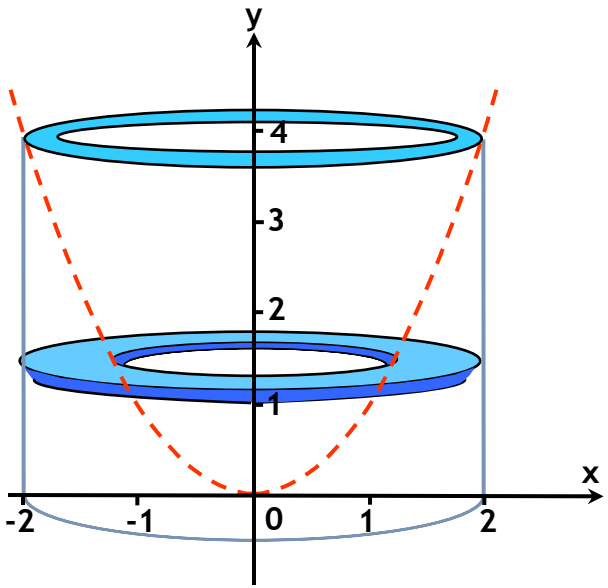
$$V = 2\pi \int_0^2 x^3 \, dx$$

$$V = 2\pi \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^2$$

$$V = 8\pi$$

Jika daerah pada contoh ke-10 tersebut dipartisi secara horisontal dan sebuah partisi diputar mengelilingi sumbu y, maka partisi tersebut membentuk cincin. Volume benda putar tersebut dihitung dengan metode cincin adalah sebagai berikut.





$$\Delta V \approx \pi(R^2 - r^2)\Delta y$$

$$\Delta V \approx \pi(4 - x^2)\Delta y$$

$$V \approx \sum \pi(4 - y)\Delta y$$

$$V = \lim \sum \pi(4 - y)\Delta y$$

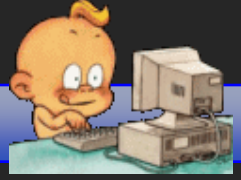
$$V = \pi \int_0^4 (4 - y)\, dx$$

$$V = \pi \left[4y - \frac{1}{2}y^2\right]_0^4$$

$$V = (16 - 8)\pi$$

$$V = 8\pi$$

Exercise



Soal 1.

Luas daerah yang diarsir pada gambar di bawah ini dapat dinyatakan dalam bentuk integral sebagai ....

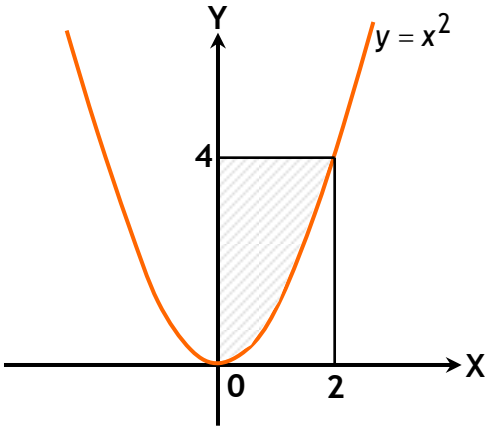
A. $\int_0^2 x^2\,dx$

B. $\int_0^4 y\,dy$

C. $\int_0^4 x^2\,dx$

D. $\int_0^2 (4 - x^2)\,dx$

E. $\int_0^4 (4 - x^2)\,dx$



Soal 1.

Luas daerah yang diarsir pada gambar di bawah ini dapat dinyatakan dalam bentuk integral sebagai ....

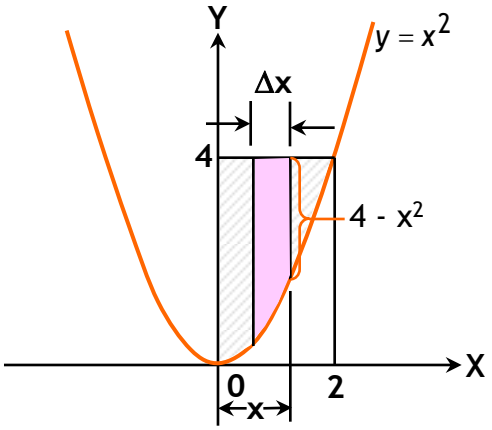
A. $\int_0^2 x^2\,dx$

B. $\int_0^4 y\,dy$

C. $\int_0^4 x^2\,dx$

D. $\int_0^2 (4 - x^2)\,dx$

E. $\int_0^4 (4 - x^2)\,dx$



Jawaban

$\Delta L \approx (4 - x^2)\,\Delta x$

$L \approx \sum (4 - x^2)\,\Delta x$

$L = \lim \sum (4 - x^2)\,\Delta x$

$$L = \int_0^2 (4 - x^2)\,dx$$ (Jawaban D)

Soal 2.

Luas daerah yang diarsir pada gambar di bawah ini sama dengan ....

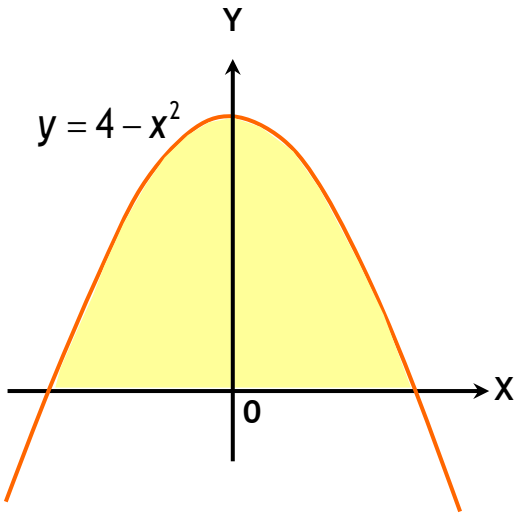
A 4,5 satuan luas

B 6 satuan luas

C 7,5 satuan luas

D 9 1/3 satuan luas

E 10 2/3 satuan luas



Soal 2.

Luas daerah yang diarsir pada gambar di bawah ini sama dengan ....

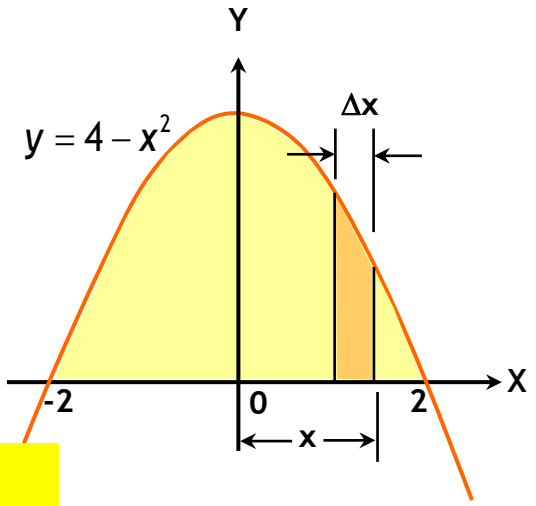
A. 4,5 satuan luas

B. 6 satuan luas

C. 7,5 satuan luas

D. 9 1/3 satuan luas

E. 10 2/3 satuan luas



Jawaban

$\Delta L \approx (4 - x^2)\,\Delta x$

$L \approx \sum (4 - x^2)\,\Delta x$

$L = \lim \sum (4 - x^2)\,\Delta x$

$$L = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx$$

$$L = \left[4x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2}$$

$$L = (8 - \tfrac{8}{3}) - (-8 + \tfrac{8}{3})$$

$$L = \frac{32}{3} = 10\tfrac{2}{3}$$

(Jawaban E)

Soal 3.

Luas daerah yang diarsir pada gambar di bawah ini sama dengan ….

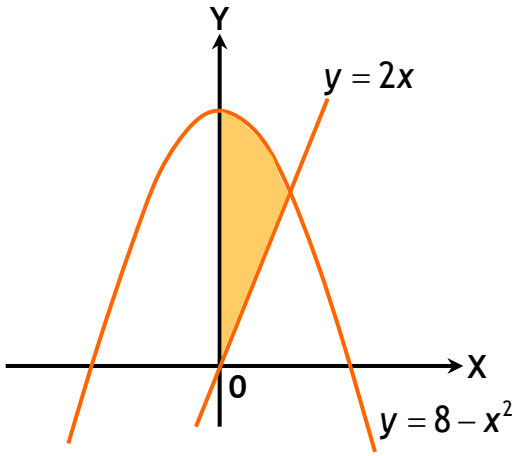
A 5 satuan luas

B 7 2/3 satuan luas

C 8 satuan luas

D 9 1/3 satuan luas

E 10 1/3 satuan luas



Soal 3.

Luas daerah yang diarsir pada gambar di bawah ini sama dengan ....

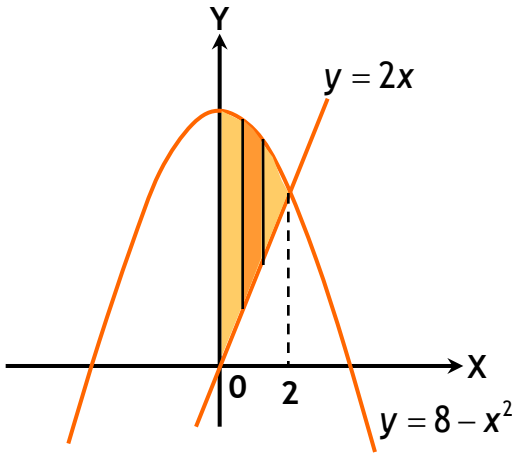
A. 5 satuan luas

B. 7 2/3 satuan luas

C. 8 satuan luas

D. 9 1/3 satuan luas

E. 10 1/3 satuan luas



Jawaban

$\Delta L \approx (8 - x^2 - 2x)\,\Delta x$

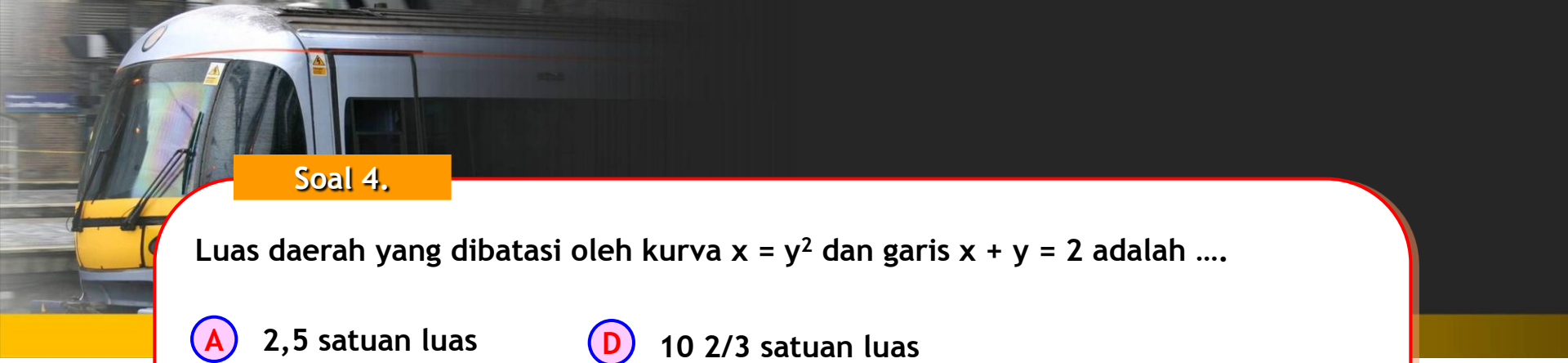
$$L = \int_0^2 (8 - x^2 - 2x)\,dx$$

$$L = \left[8x - \tfrac{1}{3}x^3 - x^2\right]_0^2$$

$$L = 16 - \tfrac{8}{3} - 4$$

$$L = \frac{28}{3} = 9\tfrac{1}{3}$$

(Jawaban D)



Soal 4.

Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $x = y^2$ dan garis $x + y = 2$ adalah ....

A. 2,5 satuan luas

B. 4,5 satuan luas

C. 6 satuan luas

D. 10 2/3 satuan luas

E. 20 5/6 satuan luas

Soal 4.

Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $x = y^2$ dan garis $x + y = 2$ adalah ….

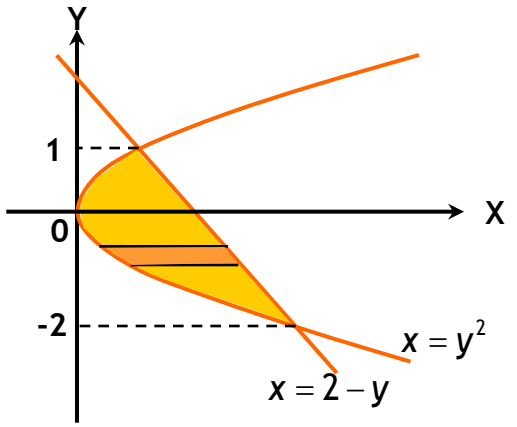
A. 2,5 satuan luas

B. 4,5 satuan luas

C. 6 satuan luas

D. 10 2/3 satuan luas

E. 20 5/6 satuan luas



Jawaban

$\Delta L \approx [(2 - y) - y^2]\,\Delta y$

$L = \int_{-2}^{1} (2 - y - x^2)\,dy$

$L = \left[2y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_{-2}^{1}$

$L = (2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}) - (-4 - 2 + \frac{8}{3})$

$L = \frac{9}{2} = 4{,}5$ (Jawaban B)

Soal 5.

Daerah yang di arsir pada gambar di bawah ini diputar mengelilingi sumbu Y sebesar 360°. Jika digunakan metode kulit tabung, maka bentuk integral yang menyatakan volume benda putar tersebut adalah ....

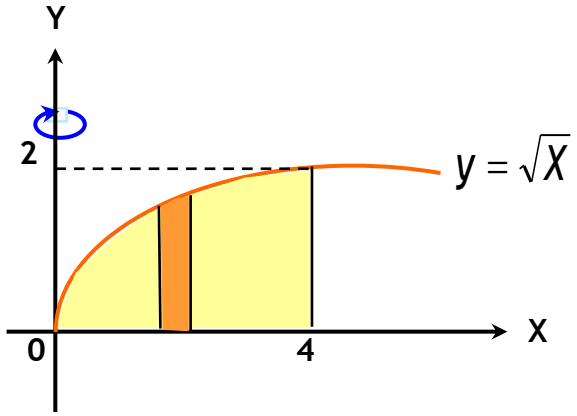
A $v = \pi \int_0^4 x\,dx$

B $v = \pi \int_0^4 x^2\,dx$

C $v = \pi \int_0^2 y\,dy$

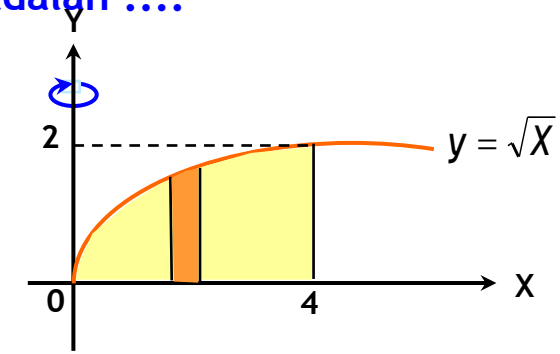
D $v = 2\pi \int_0^4 x\sqrt{x}\,dx$

E $v = 2\pi \int_0^2 (16 - y)\,dy$



Soal 5.

Daerah yang di arsir pada gambar di bawah ini diputar mengelilingi sumbu Y sebesar 360°. Jika digunakan metode kulit tabung, maka bentuk integral yang menyatakan volume benda putar tersebut adalah ....



A $v = \pi \int_0^4 x\,dx$

B $v = \pi \int_0^4 x^2\,dx$

C $v = \pi \int_0^2 y\,dy$

D $v = 2\pi \int_0^4 x\sqrt{x}\,dx$

E $v = 2\pi \int_0^2 (16 - y)\,dy$

Jawaban

$\Delta V \approx 2\pi x\sqrt{x}\,\Delta x$

$$V = 2\pi \int_0^4 x\sqrt{x}\,dx$$ (Jawaban D)

Soal 6.

Daerah yang di arsir pada gambar di bawah ini diputar mengelilingi sumbu X sebesar 360°. Volume benda putar yang terjadi adalah ….

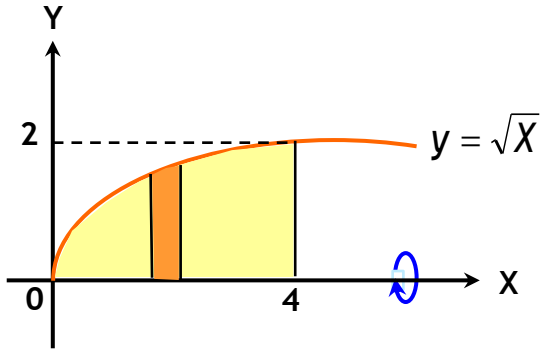
A. 4π satuan volum

B. 6π satuan volum

C. 8π satuan volum

D. 12π satuan volum

E. 15π satuan volum



Soal 6.

Daerah yang di arsir pada gambar di bawah ini diputar mengelilingi sumbu X sebesar 360°. Volume benda putar yang terjadi adalah ….

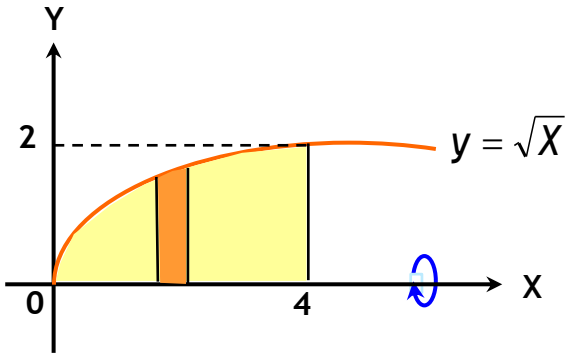
A. 4π satuan volum

B. 6π satuan volum

C. 8π satuan volum

D. 12π satuan volum

E. 15π satuan volum



Jawaban

$\Delta V \approx \pi(\sqrt{x})^2 \, \Delta x$

$$V = \pi \int_0^4 x \, dx$$

$$V = \pi \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^4$$

$$V = 8\pi$$ (Jawaban C)