# Teknik Pengintegralan

- Integral Parsial
- Integral Rasional

# Teorema Dasar

Berdasarkan pada pengitegralan rumus turunan hasil dua kali fungsi :

Jika u dan v adalah fungsi x yang dapat dideferensiasi :

d(uv) = udv + vdu

udv = d(uv) – vdu

$$\int udv = uv - \int vdu$$

# Aturan yg hrs diperhatikan

1. Bagian fungsi yang dipilih sebagai dv harus dapat segera diintegrasikan

2. $\int v\,du$ tidak boleh lebih sulit daripada $\int u\,dv$

**Contoh 1 :**

$$\int x \cos x\,dx$$

a. Misal : u = x      dv = cos x dx

du = dx      v = sin x

## Rumus integralnya :

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x dx$$

**u dv u v - v du**

$= x \sin x + \cos x + c$

**Misal diambil :**

**u = cos x** **dv = x dx**

**du = -sin x dx** **v = $x^2$/2**

**Rumus Integral Parsialnya :**

$$\int \cos x\, x\,dx = (\cos x)\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}(-\sin x\,dx)$$

**Penting Sekali pemilihan u dan v**

Integralnya lebih susah

# Pengintegralan Parsial Berulang

Seringkali ditemui pengintegralan parsial berulang beberapa kali

$$\int x^2 \sin x dx$$

**Misal : u = $x^2$** **dv = sin x dx**

**du = 2x dx** **v = -cos x**

**Maka :**

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx$$

- **Tampak bahwa pangkat pada x berkurang**
- **Perlu pengintegralan parsial lagi**

# Dari contoh 1 :

$$\int x^2 \sin x dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x + c)$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + K$$

# Contoh 3 :

$$\int e^x \sin x dx$$

**Misal :** **$u = e^x$** **dan $dv = \sin x \, dx$**

**$du = e^x dx$** **dan $v = -\cos x$**

**Maka :**

$$\int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$$

**Perlu penerapan integral parsial dalam integral kedua**

$$\int e^x \cos x dx \Rightarrow$$

| | |
|---|---|
| **$u = e^x$** | **$dv = \cos x \, dx$** |
| **$du = e^x dx$** | **$v = \sin x$** |

# Sehingga :

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

**Bila hasil ini disubstitusikan pada hasil pertama**

$$\int e^x \sin x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$2\int e^x \sin x dx = e^x \cos x + e^x \sin x + C$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + K$$

# Fungsi Rasional dan Pecahan Parsial

- Fungsi rasional diekspresikan sbb

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

dimana $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah polinomial

- Untuk menghitung integral fungsi rasional, perlu dilakukan dekomposisi pecahan-parsial dari fungsi rasional tersebut.

**Metode pecahan parsial** adalah suatu tehnik aljabar dimana *R(x)* didekomposisi menjadi jumlahan suku-suku:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = p(x) + F_1(x) + F_2(x) + \ldots + F_k(x),$$

dimana $p(x)$ suatu polinomial dan $F_i(x)$ pecahan - parsial

berbentuk $$\frac{A}{(ax+b)^n} \text{ (faktor linier) atau}$$

$$\frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^n} \text{ (faktor kuadratik)}$$

$A, B, C, a, b, c$ adalah konstanta - konstanta.

Contoh

Hitung $\int \frac{x^3 - 1}{x^3 + x}\,dx$

Dekomposisi integrand : $\frac{x^3 - 1}{x^3 + x} = 1 - \frac{1 + x}{x(x^2 + 1)}$

Suku ke-2 adalah fungsi rasional yg dapat didekomposisi

pecahan-parsial: $\frac{1 + x}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$

Konstanta $A, B$ dan $C$ diperoleh dengan mengalikan kedua sisi dgn fungsi penyebut:

$$1 + x = A(x^2 + 1) + (Bx + C)x$$

$$1 + x = (A + B)x^2 + (C)x + A$$

Diperoleh $A = 1, B = -1, C = 1$. Jadi $\frac{1 + x}{x(x^2 + 1)} = \frac{1}{x} + \frac{-x + 1}{x^2 + 1}$.

Jadi fungsi rasional semula didekomposisi menjadi

$$\frac{x^3-1}{x^3+x} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1-x}{x^2+1}$$

$$\int \frac{x^3-1}{x^3+x}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1-x}{x^2+1}\right) dx$$

$$= x - \ln|x| + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - \tan^{-1} x + c$$

## Faktor-faktor Linier

1. Jika *Q(x)* adalah *(ax +b)*$^n$ ( kelipatan *n* dari faktor *ax +b*), maka dekomposisinya

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n},$$

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \text{ konstanta}$$

2. Jika *Q(x)* adalah faktor-faktor linier dengan kelipatan *n = 1*

$$Q(x)=(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\cdots(a_nx+b_n)$$

maka dekomposisi :

$$\frac{A_1}{(a_1x+b_1)}+\frac{A_2}{(a_2x+b_2)}+\cdots+\frac{A_n}{(a_nx+b_n)}$$

# EX

$$1.\int \frac{3x-5}{(x-2)^2}dx$$

$$2.\int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}dx$$

$$3.\int \frac{x+5}{x^2-2x-3}dx$$

$$4.\int \frac{x}{x^2+4x-5}dx$$

# Faktor Kuadratik

3.Jika $Q(x)$ adalah $(ax^2 + bx + c)^n$ (kelipatan n dari faktor kuadratik $ax^2 + bx + c$), dimana $ax^2 + bx + c$ tidak dapat difaktorkan i.e. $b^2 - 4ac < 0$, maka dekomposisi $R(x)$

$$\frac{B_1x + C_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{B_nx + C_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

$B_1, B_2, \ldots, B_n, C_1, C_2, \ldots, C_n$ konstanta-konstanta.

4. Jika faktor-faktor kuadratik mempunyai kelipatan *n=1*, maka dekomposisi

$$\frac{B_1 x + C_1}{a_1 x^2 + b_1 x + c_1} + \frac{B_2 x + C_2}{a_2 x^2 + b_2 x + c_2} + \cdots + \frac{B_n x + C_n}{a_n x^2 + b_n x + c_n}$$

$B_1, B_2, \ldots, B_n, C_1, C_2, \ldots, C_n$ konstanta - konstanta.

Jika *Q(x)* kombinasi dari faktor linier dan kuadratik, gunakan dekomposisi yang sesuai untuk masing-masing faktor.

# EX

$$1.\int \frac{4-2x}{(x^2-1)(x-1)^2}dx$$

$$2.\int \frac{16x+32}{x^2(x^2+4)^2}dx$$

# Example

$$\int \frac{5x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^4 + x^2} dx$$

$$x^4 + x^2 = x^2(x^2 + 1)$$

$$\frac{5x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^4 + x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

# PR

1. $\displaystyle\int \frac{5}{(2x+1)(x-2)}\,dx.$

2. $\displaystyle\int \frac{4x^2-3x-4}{x^3+x^2-2x}\,dx$