

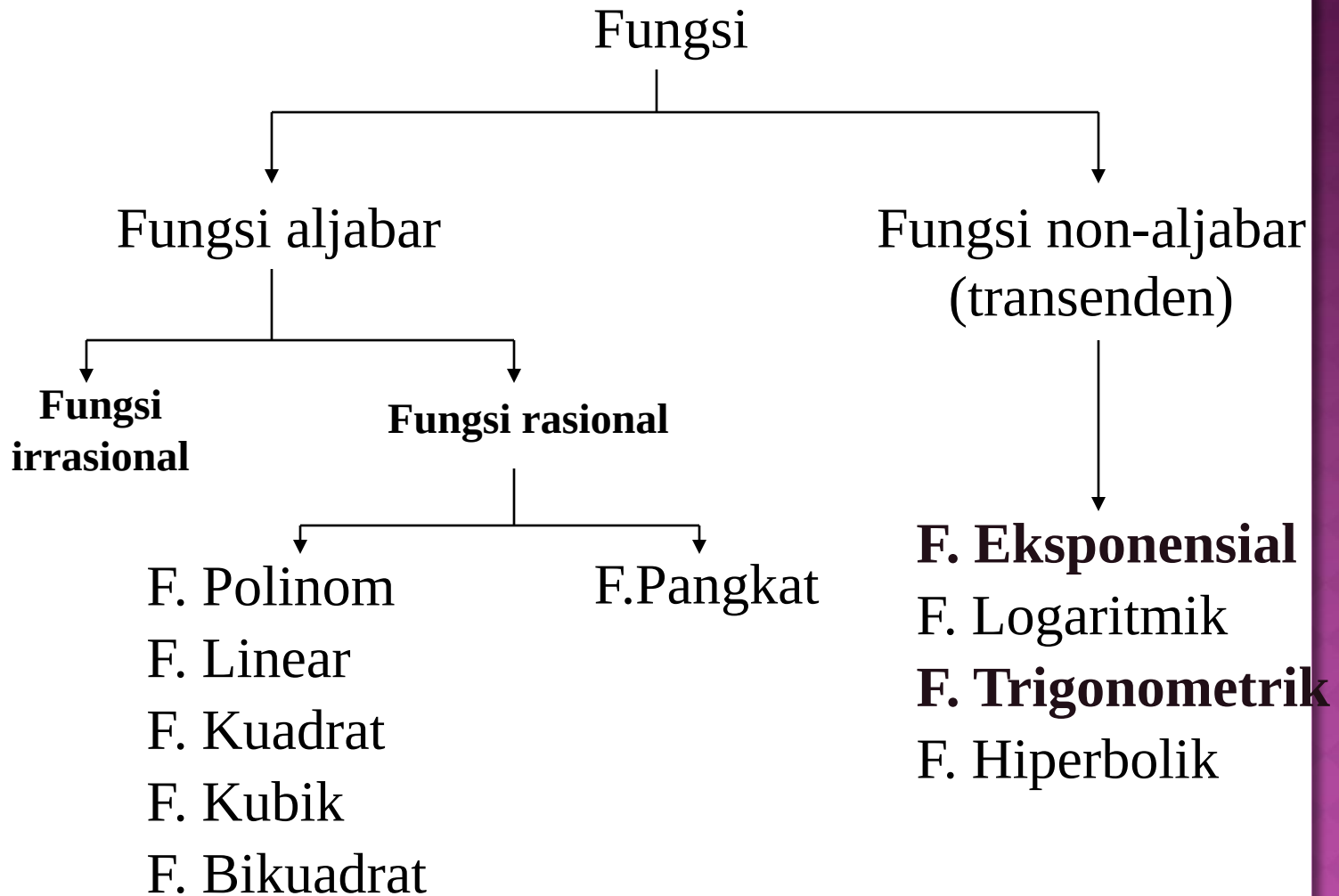


LAST CHAPTER



FUNGSI TRANSENDEN

JENIS-JENIS FUNGSI



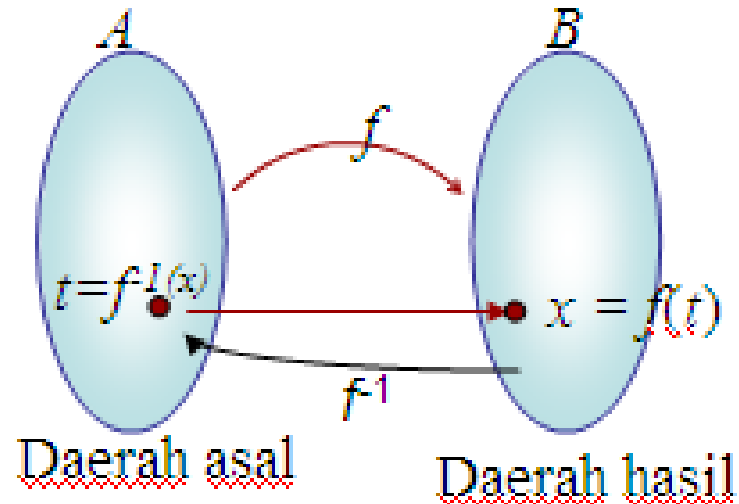
FUNGSI INVERS

Definisi

misal f adalah fungsi 1-1, invers dr fungsi f , ditulis f^{-1} merupakan fungsi tunggal yang didef pd Range function (R_f) dan memenuhi :

$$x = f(t) \quad \Leftrightarrow \quad t = f^{-1}(x)$$

$$x = f[f^{-1}(x)] \quad \forall x \in R_f$$

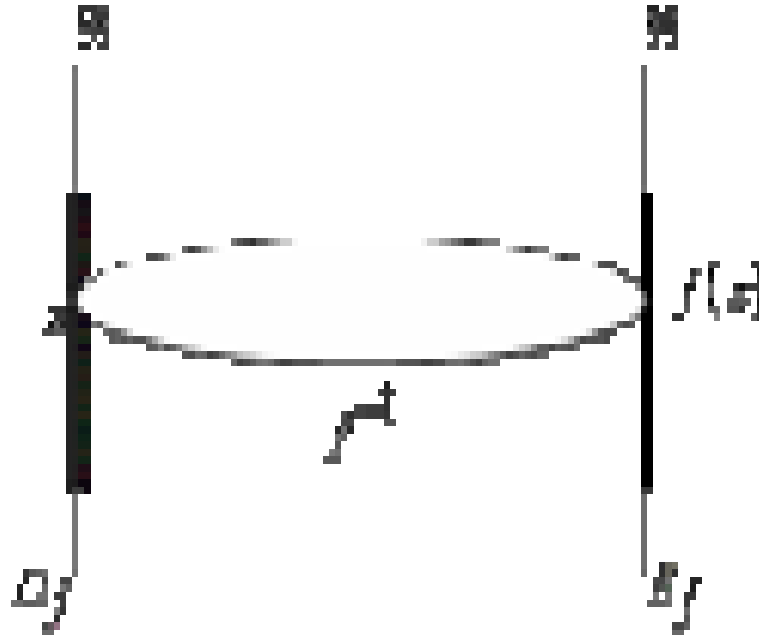


Teorema

misal $y=f(x)$ fungsi satu-satu, maka f punya invers bila $\forall x \in D_f$ dan $y \in R_f$

Berlaku :

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}[f(x)]$$

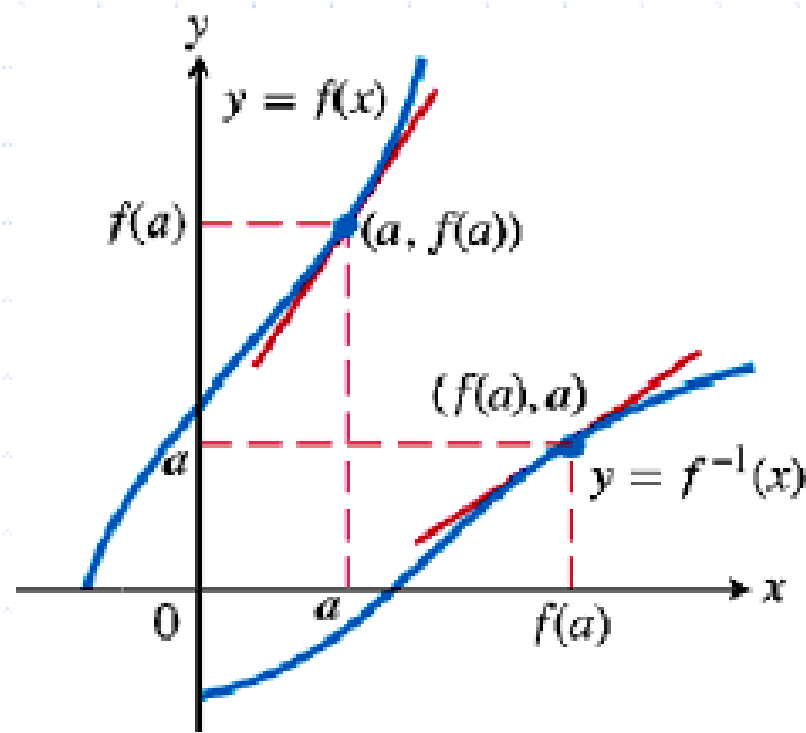


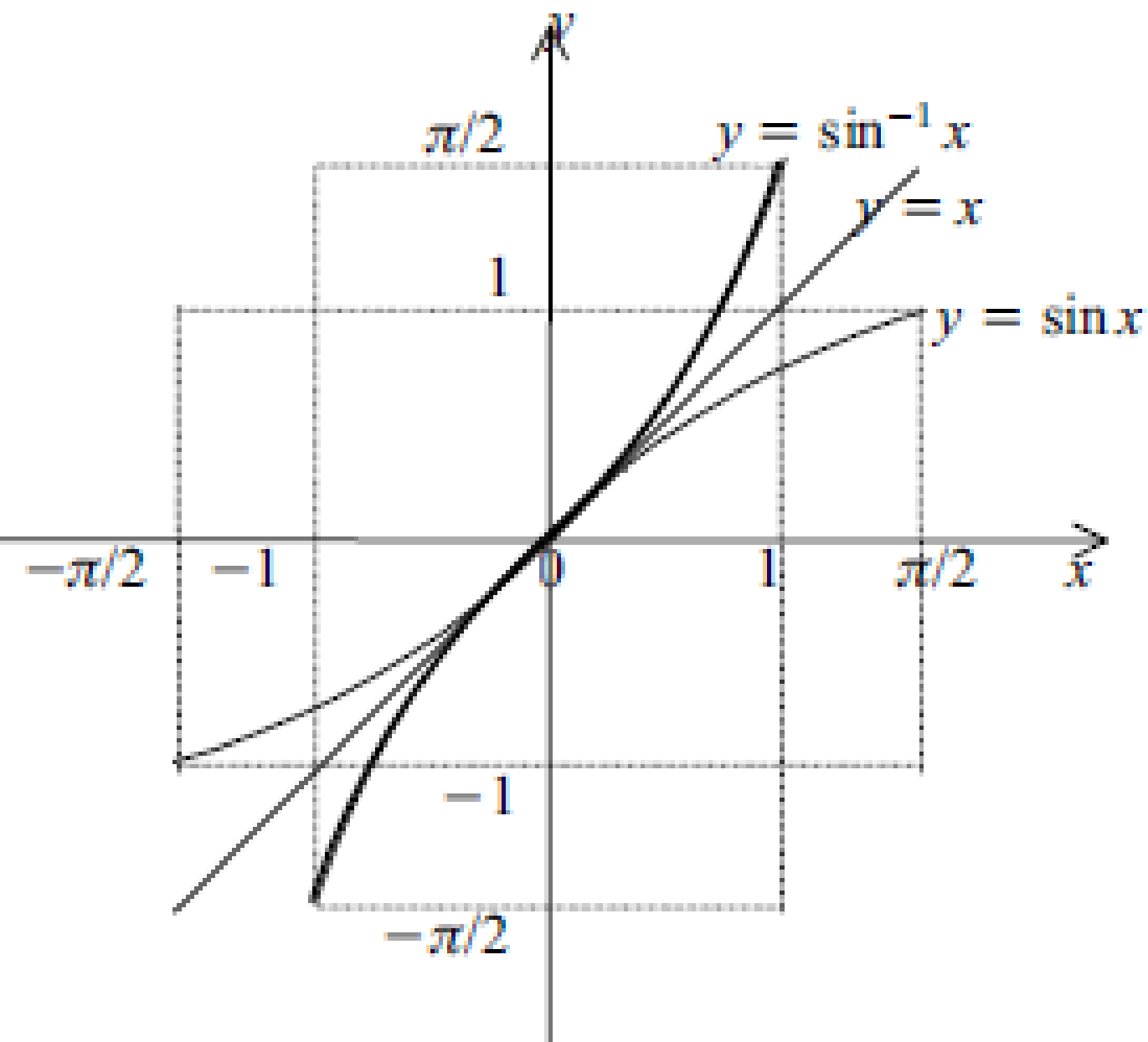
Grafik $y=f^{-1}(x)$ dan turunannya

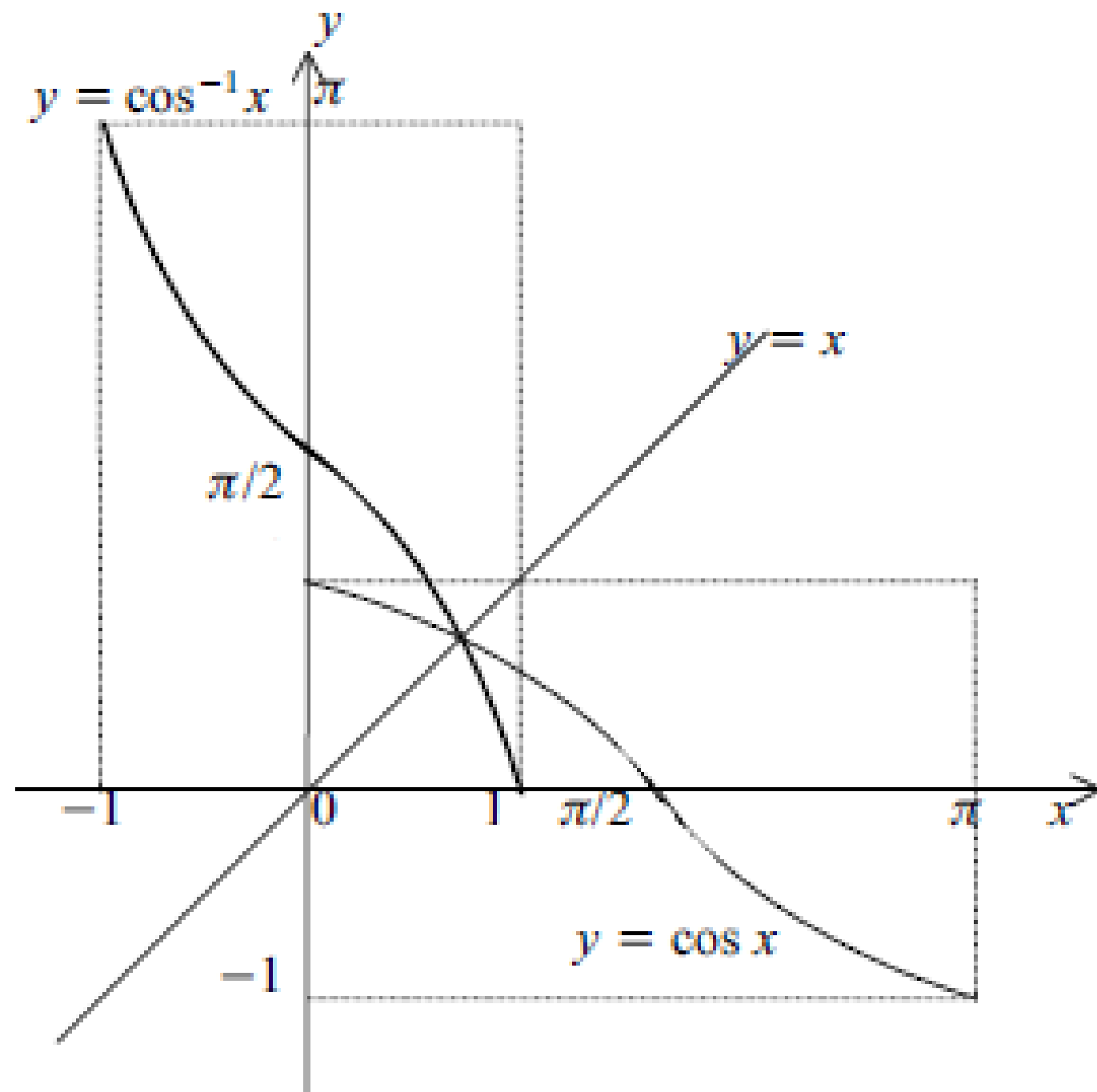
Misalkan f mempunyai inverse. Maka

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

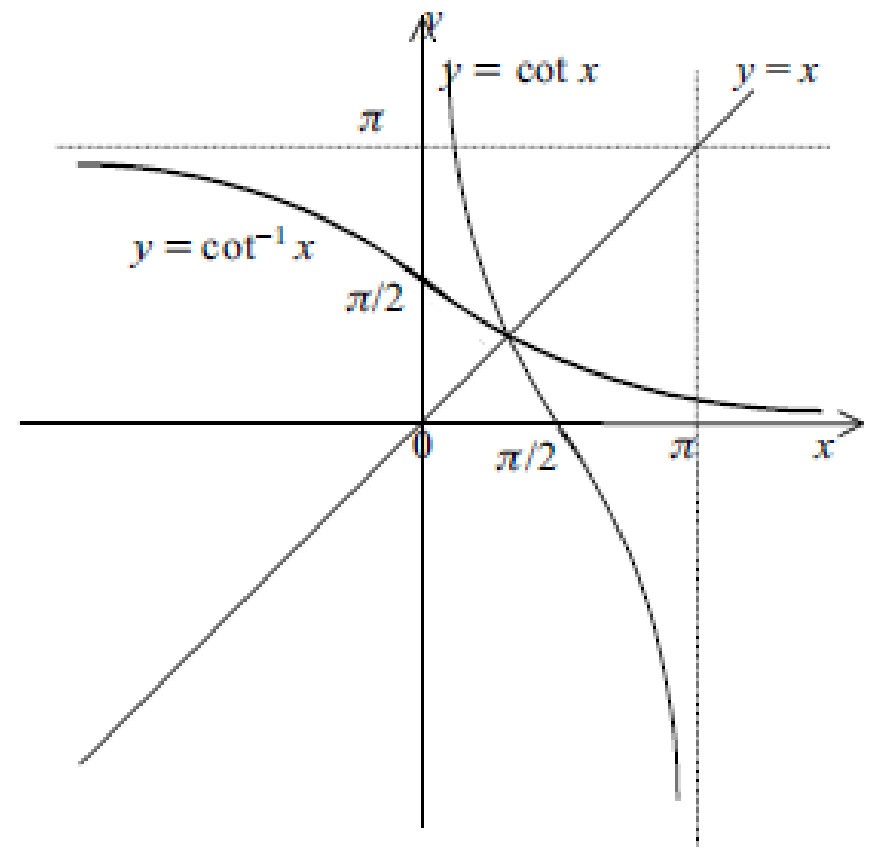
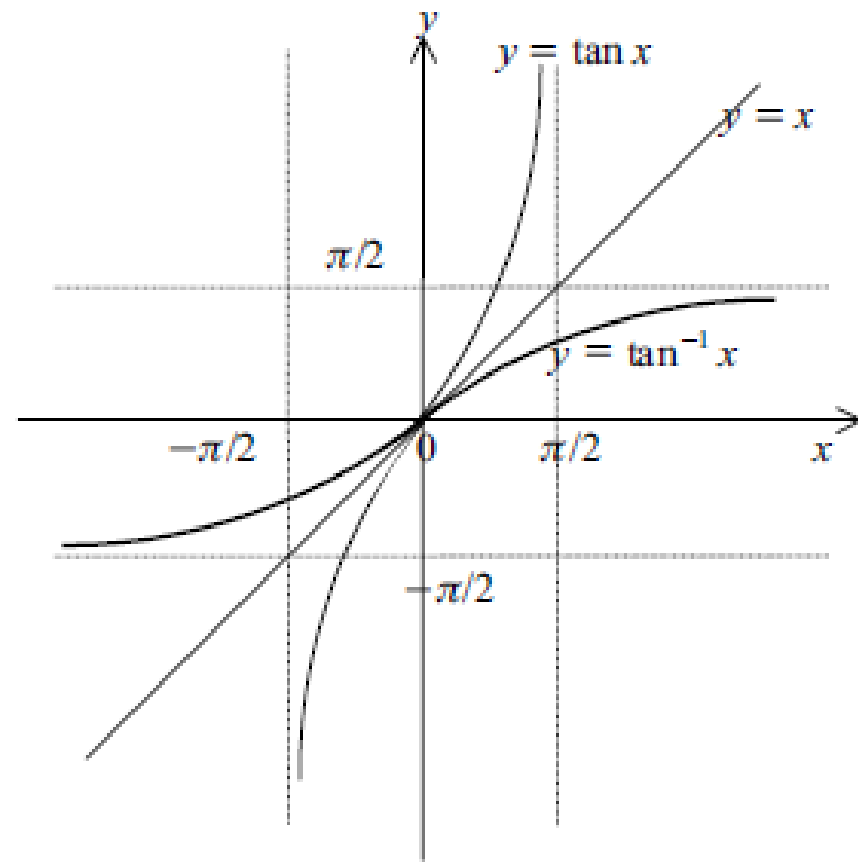
Dengan demikian, jika titik (x,y) berada pada grafik f , maka titik (y,x) berada pada grafik f^{-1} . Artinya grafik f^{-1} adalah hasil pencerminan dari grafik f terhadap garis $y=x$.







Grafik tan dan cot



TEOREMA

Apabila f monoton murni pada daerah asalnya maka f memiliki invers

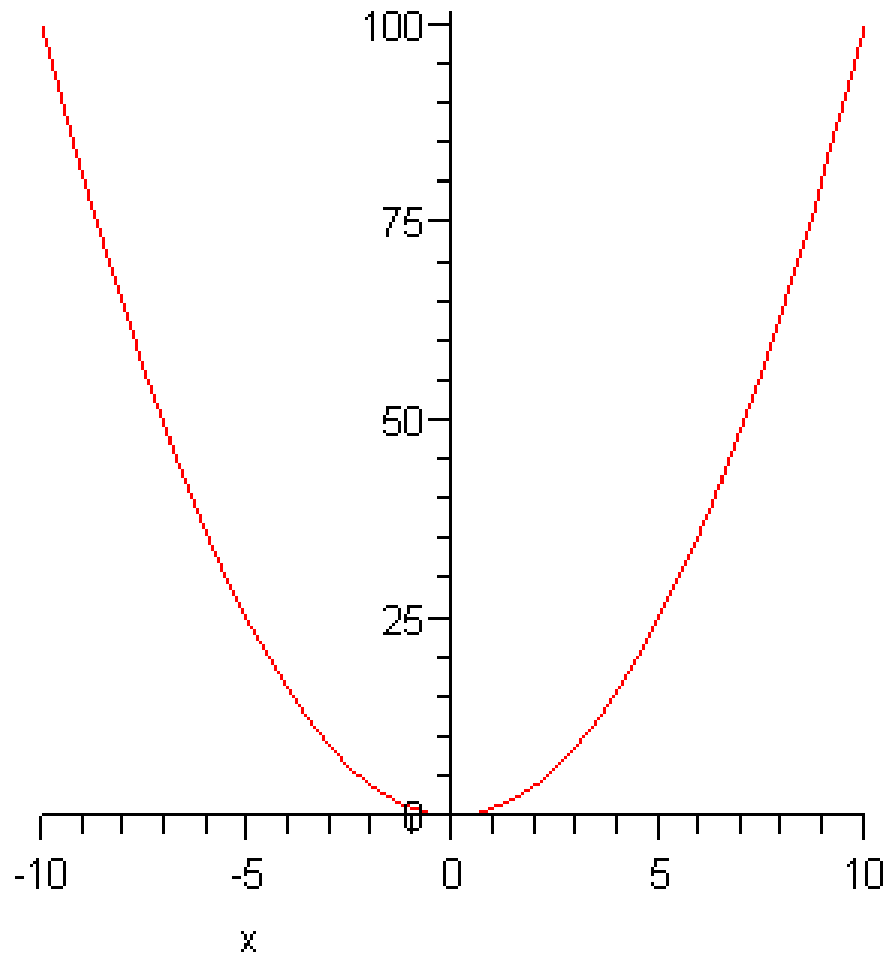
Ex.

Tunjukkan $f(x) = x^5 + 2x + 1$

Mempunyai invers!

Misal $f(x)=x^2$

Syarat apa yang harus dipenuhi agar f mempunyai invers?



TURUNAN FUNGSI INVERS

Andaikan dapat diturunkan, monoton murni pada interval I , dan bila $f'(x) \neq 0$ pada suatu titik x dalam interval I , maka invers f dapat diturunkan di titik $y=f(x)$ pada R_f dan berlaku

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}$$



EX

1. Jika $f(x) = x^5 + 2x + 1$ maka tentukan $(f^{-1})'(4)$!
2. Misal $f(x) = x^3 - 2$ maka tentukan $(f^{-1})'(6)$!

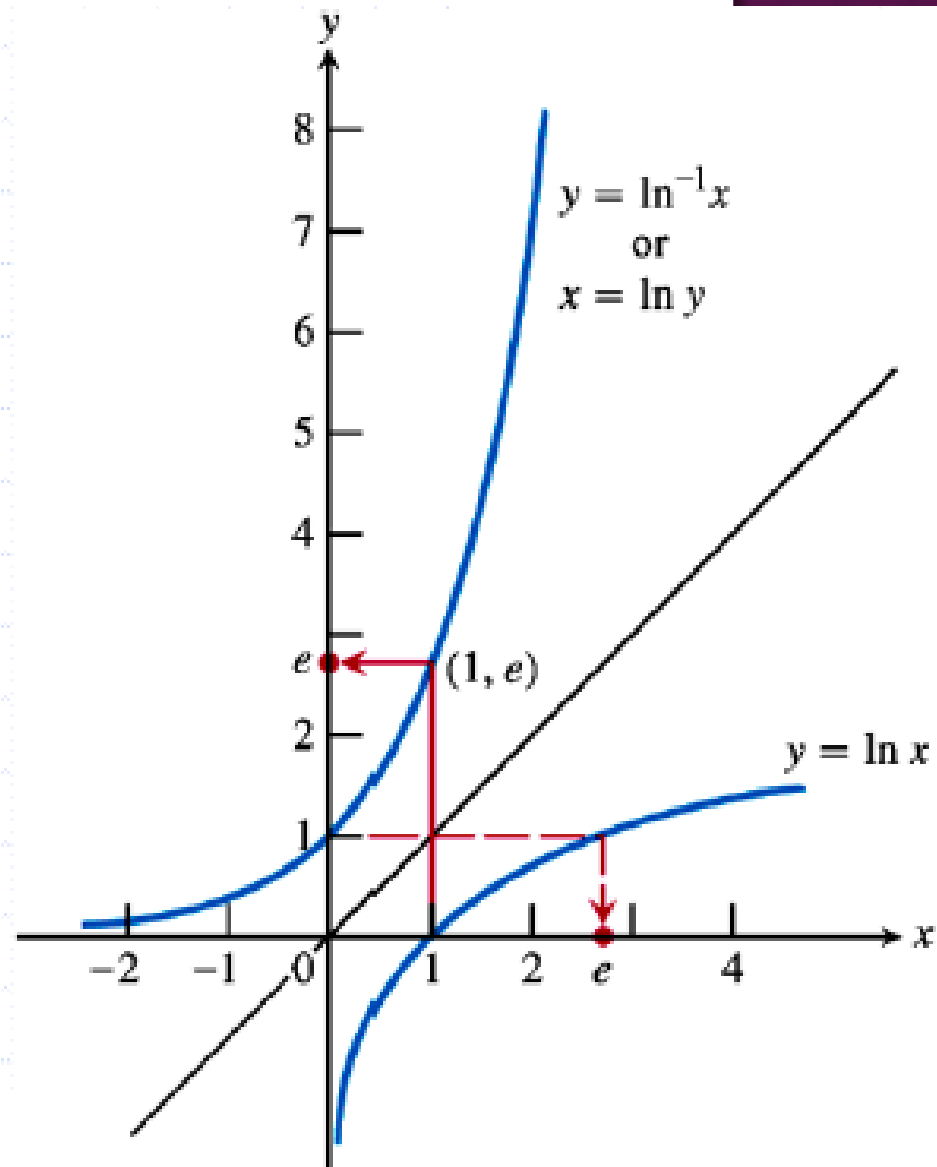
FUNGSI EKSPONENSIAL NATURAL

Fungsi eksponensial natural, $y=\exp(x)$, adalah inverse dari logaritma natural.

$$x=\exp(y) \Leftrightarrow y=\ln x.$$

Bilangan basis fungsi ini, ditulis $e=\exp(1)$ sehingga $\ln e=1$.
Ekspansi desimal bilangan ini adalah

$$e \approx 2,71828182845 \dots$$



Dengan demikian,

$$\int_1^e \frac{1}{t} dt = 1$$

Dari definisi langsung diperoleh bahwa

1. $\exp(\ln x) = x$, bila $x > 0$.
2. $\ln(\exp(x)) = x$.

Perlu dicatat, bahwa e adalah bilangan transenden (dibuktikan oleh Euler), yaitu tidak ada polinom $p(x)$ sehingga $p(e) = 0$.

Kita dapat mengkonfirmasikan (saat ini untuk bilangan rasional r), bahwa $y=\exp(x)$ adalah sebuah fungsi eksponensial.

$$e^r=\exp(\ln e^r)=\exp(r\ln e)=\exp(r)$$

Sejauh ini kita telah mendefinisikan bilangan pangkat dengan pangkat rasional. Untuk x irrasional, kita kembali pada definisi fungsi eksponensial, yaitu

$$e^x=\exp(x)$$

Jadi, untuk selanjutnya.

1. $e^{\ln x}=x$, untuk $x>0$.
2. $\ln(e^x)=x$, untuk tiap x .

Turunan dari $\exp(x)$

Misalkan $y=e^x$. Karena $\ln x$ dan $\exp(x)$ saling inverse, maka $x=\ln y$. Apabila kedua sisi didiferensialkan, dengan menggunakan Aturan Rantai, diperoleh bahwa $1=(1/y)D_x y$ atau

$$D_x y = y$$

Teorema

$$\frac{d}{dx} [e^x] = e^x$$

Sebagai akibat kita peroleh

Teorema

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Contoh

Tentukan turunan dari $y = e^{5-7x}$

Misalkan $u = 5 - 7x$ dan oleh karena itu $u' = -7$.

Maka, dengan Aturan Rantai diperoleh bahwa

$$y' = e^u u' = e^{5-7x} (-7) = -7e^{5-7x}$$

Contoh

Tentukan turunan dari $y = e^{x \ln x}$

Dengan Aturan Rantai diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} y' &= e^{x \ln x} D_x (x \ln x) = e^{x \ln x} \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) \\ &= e^{x \ln x} (\ln x + 1) \end{aligned}$$

Hitunglah a. $\int e^{4x} dx$ dan b. $\int_0^{\pi/2} e^{\sin x} \cos x dx$

a. Misalkan $u = 4x$ sehingga $du = 4dx$. Maka

$$\int e^{4x} dx = \frac{1}{4} \int e^u du = \frac{1}{4} e^u + C = \frac{1}{4} e^{4x} + C.$$

b. Misal $u = \sin x$ sehingga $du = \cos x dx$. Maka

$$\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^u du = e^u + C = e^{\sin x} + C.$$

Dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus diperoleh

$$\int_0^{\pi/2} e^{\sin x} \cos x dx = e^{\sin x} \Big|_0^{\pi/2} = e^1 - e^0 = e - 1$$

FUNGSI LOGARITMA DAN EKSPONENSIAL UMUM

Definisi

Jika $a > 0$ dan x adalah sebarang bilangan real, maka

$$a^x = e^{x \ln a}$$

Dengan demikian, kita peroleh bahwa

$$\ln(a^x) = \ln(e^{x \ln a}) = x \ln a$$

Catatan: definisi di atas memungkinkan kita untuk memperluas aturan $\ln(a^r) = \ln(e^{r \ln a}) = r \ln a$ yang sebelumnya hanya berlaku untuk r rasional.

Aturan Rantai dapat dimanfaatkan untuk menentukan turunan dari a^x .

$$D_x a^x = D_x e^{x \ln a} = e^{x \ln a} D_x (x \ln a) = a^x \ln a$$

Teorema Fungsi Eksponen

$$D_x a^x = a^x \ln a$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C, \quad a \neq 1$$

Contoh

Hitunglah dy/dx bila a. $y = 3^{\sqrt{x}}$ b. $y = 5^w \ln(2^w)$

a. Gunakan Aturan Rantai dengan $u = \sqrt{x}$ Maka

$$D_x 3^{\sqrt{x}} = 3^{\sqrt{x}} \ln 3 D_x (\sqrt{x}) = \frac{3^{\sqrt{x}} \ln 3}{2\sqrt{x}}$$

b. Gunakan Aturan Rantai dan Aturan Perkalian

$$\begin{aligned} D_x \left(5^w \ln(2^w) \right) &= D_x \left(5^w \right) \ln(2^w) + 5^w D_x \left(\ln(2^w) \right) \\ &= 5^w \ln 5 \ln 2^w + 5^w \left(1/2^w \right) D_x \left(2^w \right) \\ &= 5^w \ln 5 \ln 2^w + 5^w \left(1/2^w \right) 2^w \ln 2 \end{aligned}$$

Contoh

Hitunglah $\int x 2^{x^2} dx$.

Misalkan $u = x^2$, sehingga $du = 2x dx$. Maka

$$\int x 2^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2^u du = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\ln 2} \right) 2^u + C = \left(\frac{1}{2 \ln 2} \right) 2^{x^2} + C$$

1. Tentukan $D_x y$

a. $y = x^3 e^x$ b. $y = \sqrt{e^{x^2}} + e^{\sqrt{x^2}}$ c. $y = e^{x/\ln x}$

2. Tentukan nilai integralnya!

a. $\int e^{3x+1} dx$ b. $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$ c. $\int \frac{e^{3/x}}{x^2} dx$

3. Jika diketahui $(f^{-1})'(2)$ maka tentukan

$$f(x) = 2 \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

4. Periksa apakah fungsi berikut mempunyai invers atau tidak?

a. $f(\theta) = \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \pi$

b. $f(x) = x^2 + x - 6, x \geq 2$