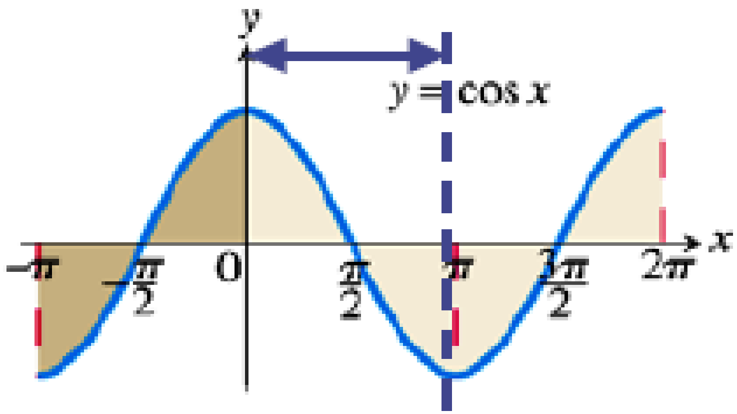
Fungsi
Transenden Part 2

By Pramesti On May 12, 2009

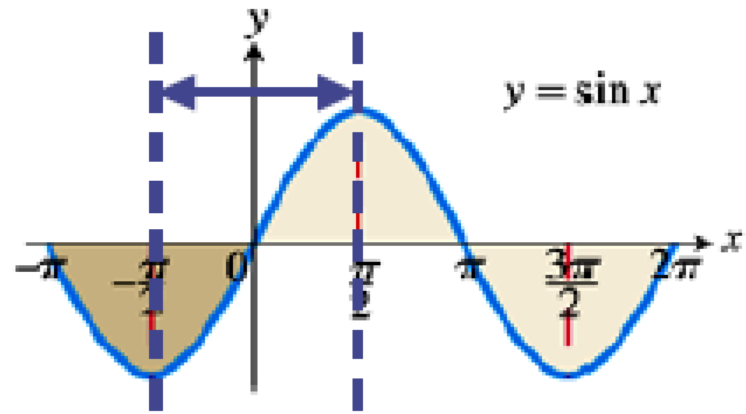
Fungsi Invers Trigonometrik

- Semua fungsi trigonometri tidak mempunyai invers, karena tidak injektif.
- Jika domain fungsi-fungsi tersebut dibatasi, maka mereka akan mempunyai fungsi



Domain: $-\infty < x < \infty$
Range: $-1 \leq y \leq 1$
Period: 2π

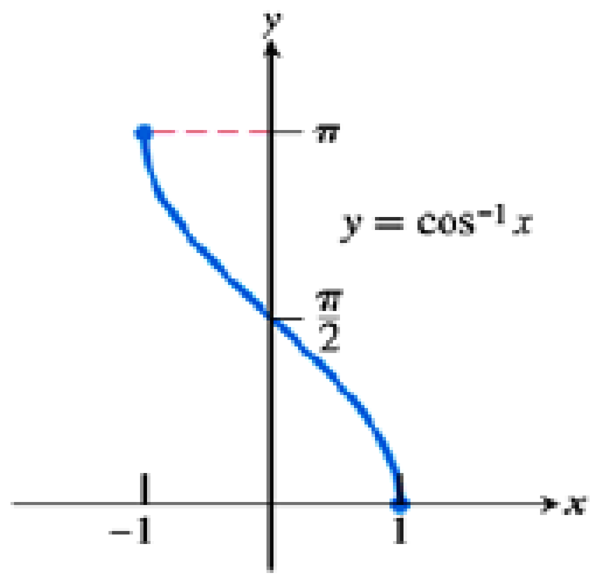
(a)



Domain: $-\infty < x < \infty$
Range: $-1 \leq y \leq 1$
Period: 2π

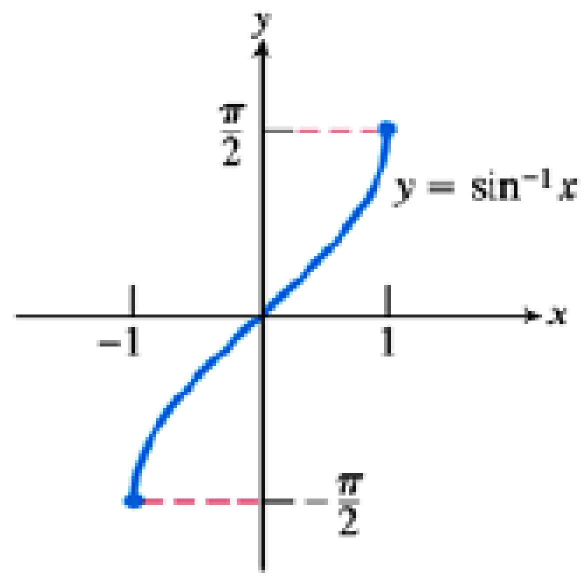
(b)

Domain: $-1 \leq x \leq 1$
Range: $0 \leq y \leq \pi$



(a)

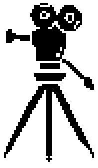
Domain: $-1 \leq x \leq 1$
Range: $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$



(b)

Invers sin(x) dan cos(x)

- sin(x) dan cos(x) bersifat periodik sehingga tidak mempunyai invers.
- Bila dibatasi pada interval di mana fungsi ini monoton sejati, maka fungsi batasan ini akan mempunyai invers.
- Kita ingin untuk tiap $x \in [-1,1]$, terdapat y sehingga $y = \sin^{-1}(x)$. Demikian pula untuk $\cos^{-1}(x)$.



PresentationFx.com

- Bila sin(x) dibatasi pada [0,π/2], maka range sin(x) adalah [0,1]. Akibatnya, fungsi $\sin^{-1}(x)$ hanya terdefinisi pada selang [0,1]
- Kita batasi sin(x) pada [- π/2,π/2] sebelum membangun inversnya
- Jadi :

$\sin^{-1}(x)$:domain= [-1,1] ;

range = [- π/2,π/2]

- Dengan cara sama dapat dibatasi $\cos(x)$ pada $[0,\pi]$.
- Jadi, $\cos^{-1}(x)$: domain = $[-1,1]$; range = $[0,\pi]$

DEFINISI

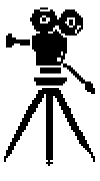
Invers dari $\sin(x)$ dan $\cos(x)$ diperoleh dengan membatasi domainnya.

- $y=\sin^{-1}(x) \Leftrightarrow x=\sin(y),\ y\in [-\pi/2,\pi/2]$
- $y=\cos^{-1}(x) \Leftrightarrow x=\cos(y),\ y\in [0,\pi]$

Example

$$\sin^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)=\frac{\pi}{4} \qquad \sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)=-\frac{\pi}{4}$$

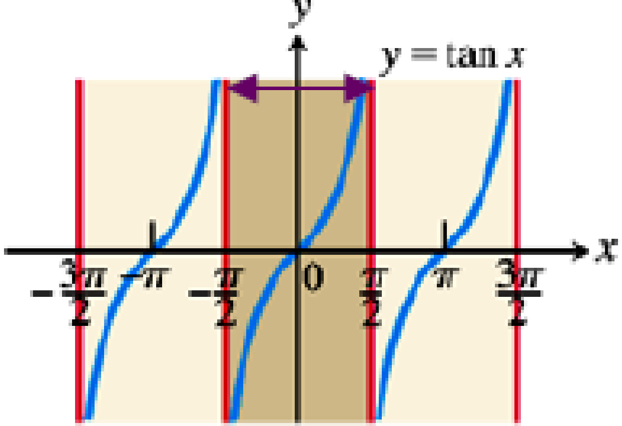
$$\cos^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3} \qquad \cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{2}$$



Invers tan(x) dan sec(x)

- tan(*x*) dan sec(*x*) juga dibatasi domainnya untuk membangun inversnya.

- Dari grafiknya, bisakah Anda batasi domain untuk tan(x) dan sec(x)???



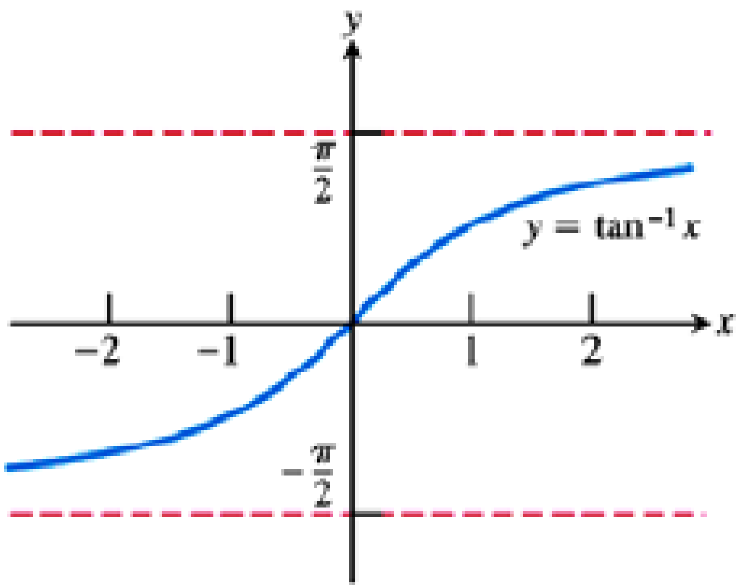
Domain: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$

Range: $-\infty < y < \infty$

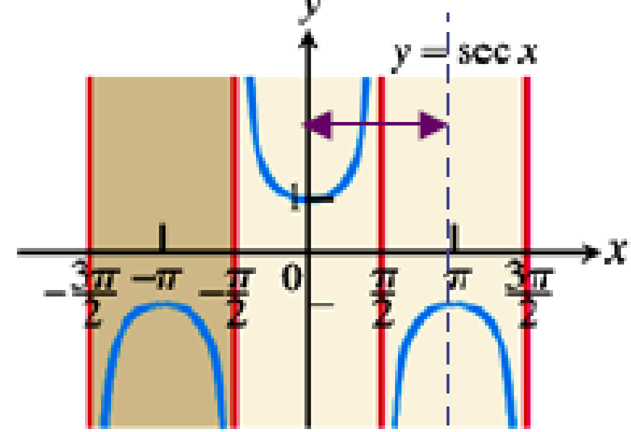
Period: π

Domain: $-\infty < x < \infty$

Range: $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$



(c)



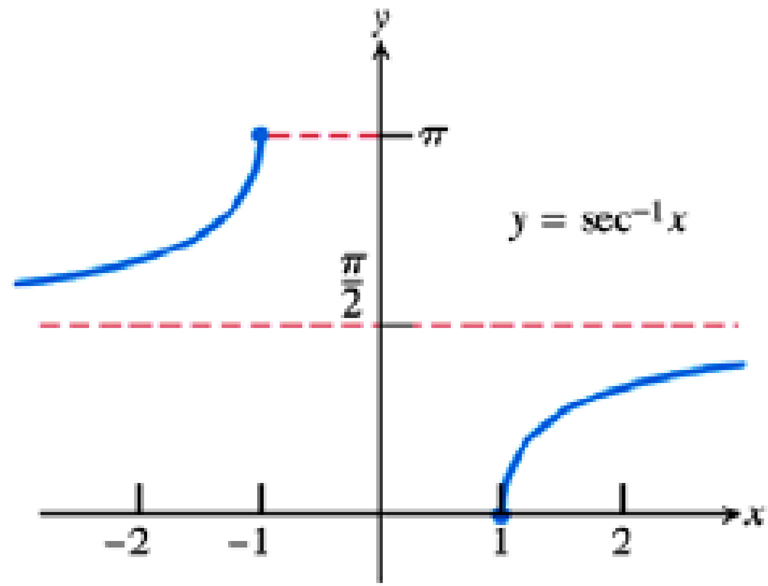
Domain: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$

Range: $y \leq -1$ and $y \geq 1$

Period: 2π

Domain: $x \leq -1$ or $x \geq 1$

Range: $0 \leq y \leq \pi, y \neq \frac{\pi}{2}$



(d)

Jadi

- Batas tan(x) : $(-\pi/2, \pi/2)$
- Batas sec(x) : $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$

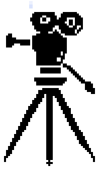
- Keempat identitas berguna untuk memperoleh turunan invers fungsi trigonometrik sebagai berikut :
- misal $y=\sin^{-1}x$ sehingga $x=\sin y$
- turunankan kedua ruas terhadap x,

Maka

$$1 = \cos y D_x y = \cos\left(\sin^{-1} x\right) D_x\left(\sin^{-1} x\right) = \sqrt{1-x^2}\, D_x\left(\sin^{-1} x\right)$$

Dengan demikian,

$$D_x\left(\sin^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



Teorema Turunan Inverse Trigonometrik

(i) $D_x \sin^{-1} x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad -1 < x < 1$

(ii) $D_x \cos^{-1} x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad -1 < x < 1$

(iii) $D_x \tan^{-1} x = \dfrac{1}{1+x^2},$

(iv) $D_x \sec^{-1} x = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1$

Contoh

$$D_x \sin^{-1}\left(2x^2\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(2x^2\right)^2}} D_x\left(2x^2\right) = \frac{4x}{\sqrt{1-\left(2x^2\right)^2}}$$

Rumus turunan akan memberi rumus integral :

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$

(ii) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$

(iii) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C$

Contoh

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \sin^{-1} x \Big|_0^{\sqrt{2}/2} = \sin^{-1}\left(\sqrt{2}/2\right) - \sin^{-1} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$