



LIMIT



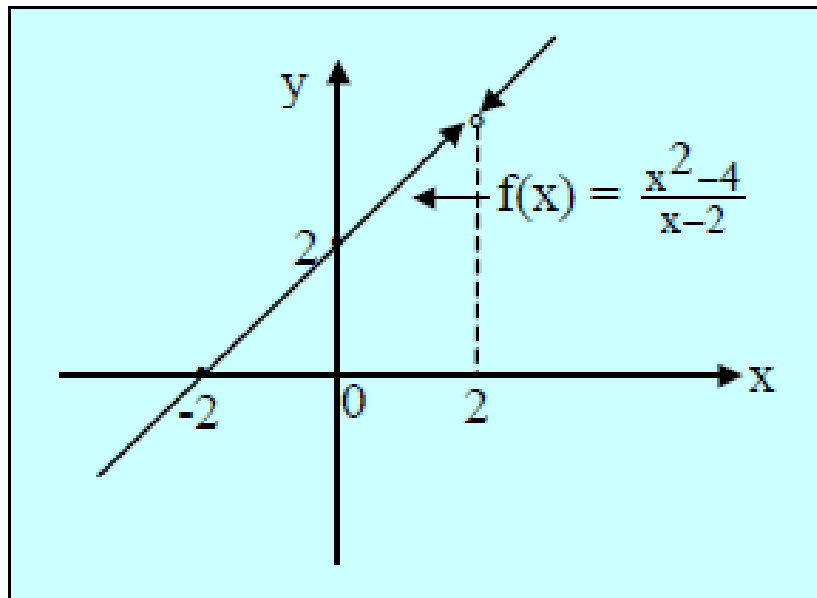
Limit fungsi secara Intuitif

Pandang

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \Rightarrow Df = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}$$

untuk $x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{0}{0} = \text{tidak tentu}$

Gambar :



Akan dicari $f(x)$ untuk x mendekati 2, dapat diperhatikan tabel berikut :

x	1,90	1,99	1,999	1,999	...	2	...	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	3,90	3,99	3,999	3,999	...		...	4,001	4,01	4,1

→ x mendekati 2 dari kiri dan kanan nilai $f(x)$ makin mendekati 4.

→ Dapat dikatakan limit $f(x)$ untuk x mendekati 2 sama dengan 4 ditulis :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$



Konsep Limit

Definisi Intuitif

Misalkan $y=f(x)$ suatu fungsi, a dan L bilangan riil

sedemikian hingga:

→ Bila x mendekati a tetapi $x \neq a$, maka $f(x)$ mendekati L

→ limit $f(x)$ bila x mendekati a adalah L , dkl :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$



Limit Kiri dan Limit Kanan



❖ Limit Kiri

$f(x)$ dikatakan mempunyai limit kiri l untuk x mendekati c dari kiri yang dinyatakan dengan $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l$ bila untuk $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni \forall x, c - \delta < x < c$ berlaku $|f(x) - l| < \varepsilon$

❖ Limit Kanan

$f(x)$ dikatakan mempunyai limit kanan g untuk x mendekati c dari kanan yang dinyatakan dengan $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = g$ bila untuk $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni \forall x, c < x < c + \delta$ berlaku $|f(x) - g| < \varepsilon$

Bila $l = g$ atau $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ maka dikatakan bahwa $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l = g$



Contoh

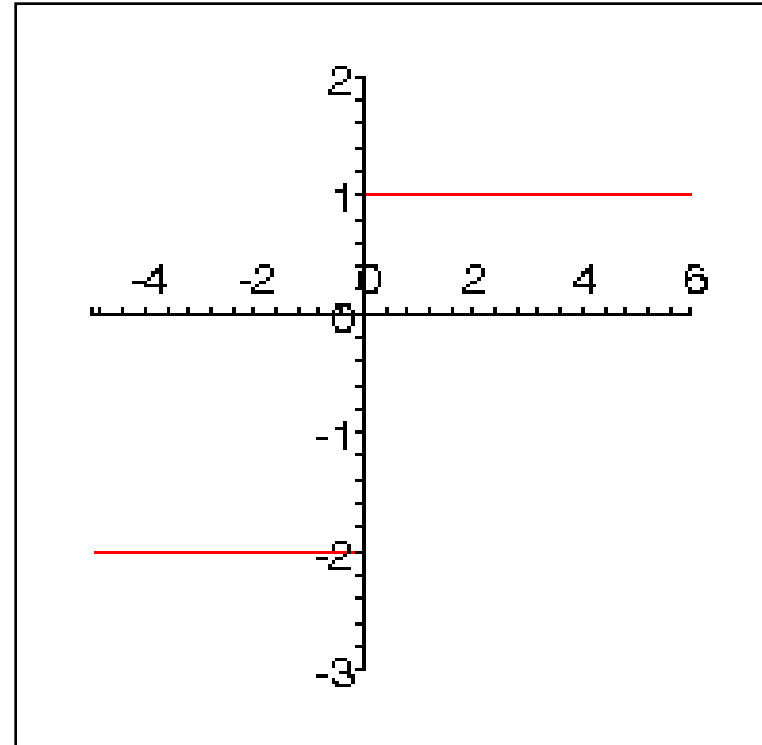


$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -2, & x < 0 \end{cases}.$$

Untuk $x > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} 1 = 1$. **limitkanan.**

Untuk $x < 0$, $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (-2) = -2$. **limitkiri.**

Maka $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ tidak ada



Soal



Tentukan nilai limitnya bila ada!

a. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{x^2 - x - 12}$

b. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$

c. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$



Hukum- hukum Limit:

1. $\lim_{x \rightarrow a} C = C$ (Hk. Konstanta).

Jika limit berikut ada $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ dan $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ maka

2. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)] \pm [\lim_{x \rightarrow a} g(x)] = L \pm M$ (Hk. Penjumlahan)

3. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)][\lim_{x \rightarrow a} g(x)] = LM$ (Hk. Perkalian)

4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M}$ asalkan jika $M \neq 0$. (Hk. Pecahan)



5. Jika n suatu bilangan bulat positif dan jika $a > 0$ untuk nilai n genap, maka

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}. \quad (\text{Hk.Akar})$$

6. Misalkan $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ dan $\lim_{x \rightarrow L} f(x) = f(L)$ maka

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) = f(L). \quad (\text{Hk.Substitusi/ Limit Komposisi})$$



Teorema Limit

1. Teorema Limit trigonometri:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

2. Hukum Apit: Misalkan $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ untuk semua x disekitar a namun $x \neq a$, dan

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$$

maka

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$



Latihan



Hitung

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} |x|$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$$

Tentukan nilai $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?

$$(3) f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

$$(5) f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

