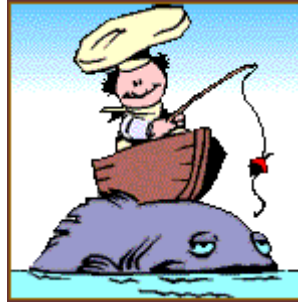


BAB 2

PROBABILITAS



Hidup penuh dengan ketidakpastian



- ❑ Tidak mungkin bagi kita untuk dapat mengatakan dengan pasti apa yang akan terjadi dalam 1 menit ke depan tapi probabilitas akan memprediksikan masa depan → membantu kita membuat suatu keputusan

Probabilitas ?



Secara umum

Probability of event A occurring $\rightarrow$
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Number of ways of getting an event A

The number of possible outcomes



Pendekatan Klasik...

- Jika dalam suatu eksperimen mempunyai n kemungkinan hasil, maka pada tiap hasilnya mempunyai kemungkinan $1/n$

Contoh 1

eksperimen: Pelemparan satu dadu

Ruang Sampel: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Probabilitas: Setiap titik sampel mempunyai probabilitas $1/6$ untuk muncul



Elemen-elemen dalam Probabilitas

1. Ruang Sampel

- Himpunan semua outcome (hasil dari suatu eksperimen) yang mungkin disebut dengan ruang sampel, dinotasikan S .
- Diskrit $\Rightarrow$ mempunyai berhingga anggota
- Kontinu $\Rightarrow$ mempunyai anggota dalam bentuk selang interval



Ruang Sampel Diskrit

Cth

- Eksperimen: pelemparan satu dadu
- Ruang sampel: $S = \{1,2,3,4,5,6\}$
- kejadian :
 $A = \text{Muncul angka ganjil} = \{1,3,5\}$
 $B = \text{muncul angka genap} = \{2,4,6\}$

Cth

- Eksperimen : pelemparan 2 koin
- $S = \{MM, MB, BM, BB\}$
- Kejadian :
 $A = \text{Kedua mata koin sama} = \{MM, BB\}$
 $B = \text{Paling tidak 1 M} = \{MM, MB, BM\}$



Ruang sampel Kontinu

Cth

Eksperimen: Data berisi nilai mk statistika

Outcome : Bilangan riil antara 0 sampai dengan 100

$$S = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 100\}$$

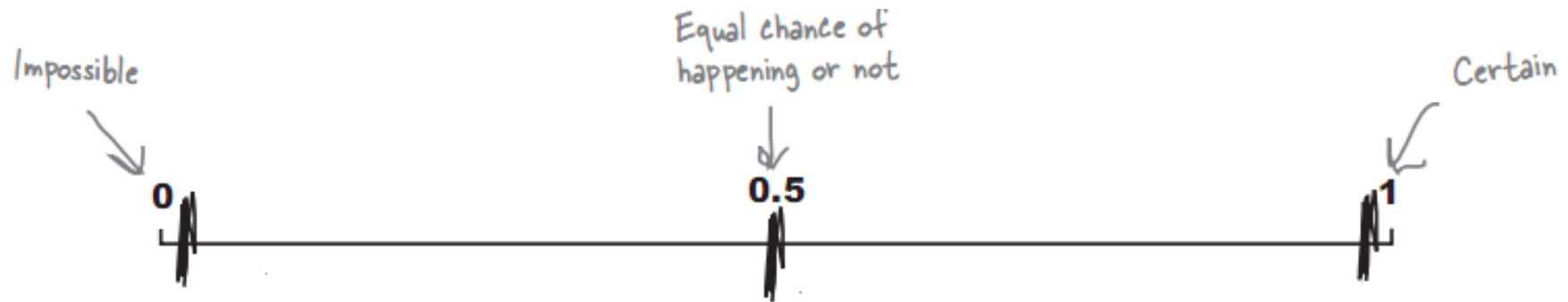
kejadian :

$$A = \text{nilai lebih 60} = \{60 < x \leq 100\}$$

$$B = \text{nilai mahasiswa yang mendapat B} = \{70 \leq x < 80\}$$



2. Kejadian



- Satu titik outcome (hasil dari suatu eksperimen) dari ruang sampel disebut dengan kejadian sederhana
- Kejadian adalah kumpulan satu atau lebih kejadian sederhana dalam suatu ruang sampel



2. Peristiwa/ Kejadian (Event)



:Himpunan bagian dari ruang Semesta
contoh.

- Kejadian sederhana (simple events); kejadian yang hanya terdiri dari satu titik contoh.
- Kejadian majemuk ; kejadian yang terdiri dari 2 atau lebih titik contoh.
- Himpunan kosong ; tidak memiliki titik contoh ($\varnothing$).

Cth :

pelemparan 1 dadu , $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

kejadian sederhana: Munculnya mata dadu 3

**Kejadian : Kejadian munculnya mata dadu
1,2,4,6**



3. Peubah acak/ Variabel random (random variables)

- Definisi : Peubah acak X (yang merupakan bilangan riil [*real-valued*]) adalah fungsi bernilai riil dan dapat diukur yang didefinisikan pada *sample space* Ω ; $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
 - Setiap titik sampel (*sample points*) $\omega \in \Omega$ dihubungkan dengan sebuah bilangan riil $X(\omega)$
 - D.k.l : memetakan setiap titik sampel ke sebuah bilangan riil menggunakan peubah acak X



Contoh

- Sebuah koin dilempar tiga kali; setiap lemparan akan menghasilkan *head* (H) atau *tail* (T)
- Ruang Sampel :

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \mid \omega_i \in \{H, T\}, i=1,2,3\}$$

- Misalnya peubah acak X merupakan jumlah total *tail* (T) dalam ketiga eksperimen pelemparan koin tersebut, maka :

ω	HHH	HHT	HTH	THH	HTT	THT	TTH	TTT
$X(\omega)$	0	1	1	1	2	2	2	3



Diagram Venn

Hubungan antara kejadian dengan ruang sampel dapat digambarkan dalam suatu diagram venn

Kejadian Komplemen (A' A^c / $\bar{A}$ /)

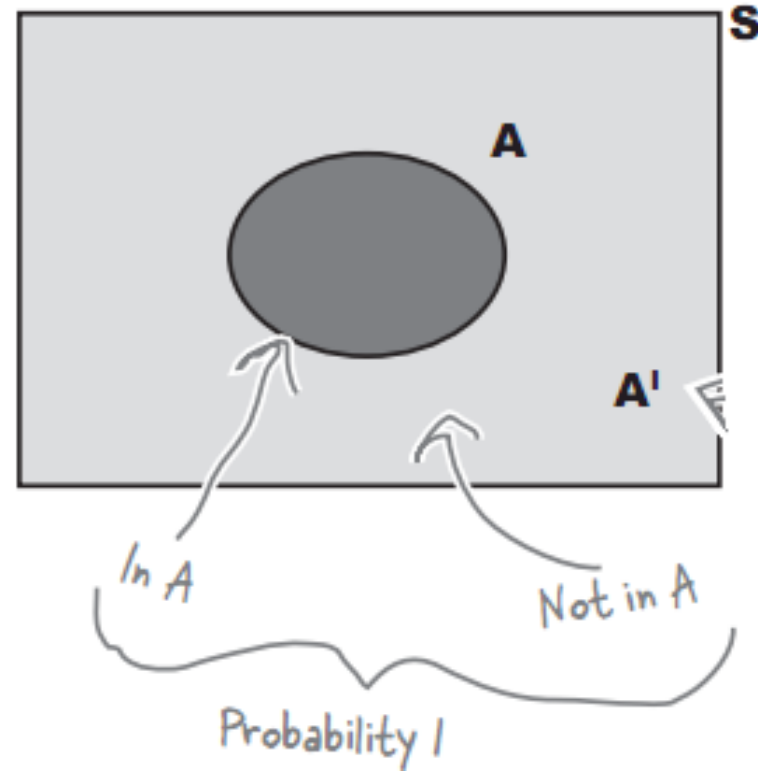
→ Mengindikasikan bahwa kejadian A tidak terjadi

Cth

S : Bilangan bulat

A : bilangan genap

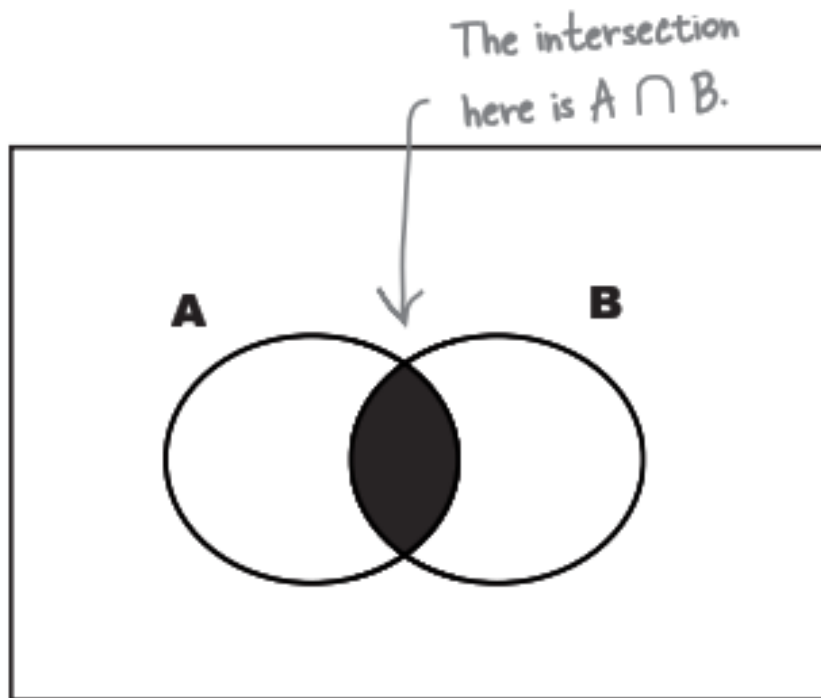
A' : bilangan ganjil



Irisan

- **Irisan antara A dan B** merupakan kejadian A dan juga merupakan kejadian B
- Notasi :

$$\text{"A dan B"} : A \cap B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ dan } \omega \in B\}$$



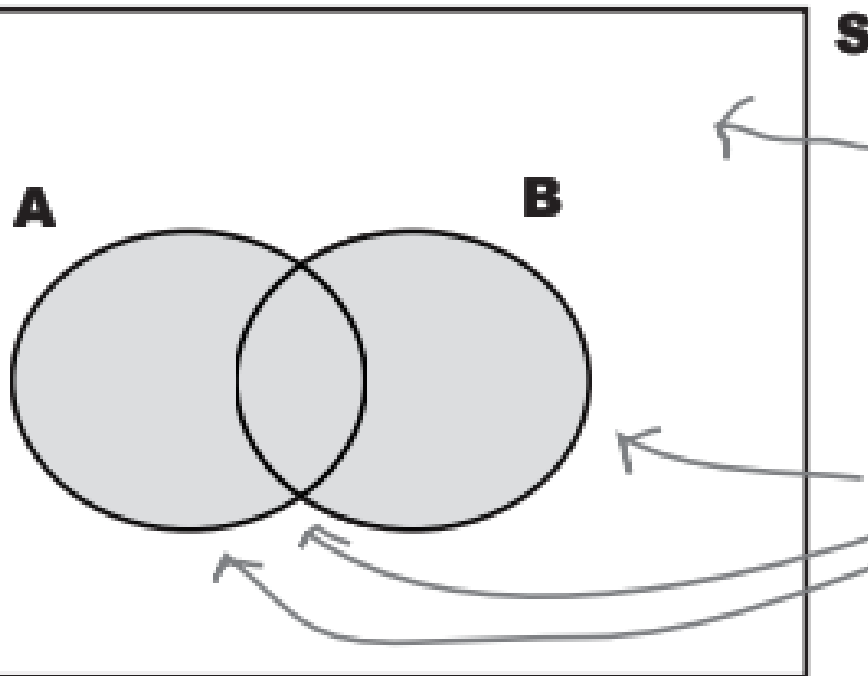
S



Gabungan

- Notasi : $A \cup B$
- Merupakan kejadian yang merupakan kejadian A atau B atau keduanya

"A atau B" : $A \cup B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ atau } \omega \in B\}$



S

If there are no elements that aren't in either A, B, or both, like in this diagram, then A and B are exhaustive. Here the white bit is empty.

The entire shaded area is $A \cup B$.

Mutually Exclusive Events

- Dua kejadian A dan B dikatakan saling *mutually exclusive* jika kedua kejadian A dan B saling disjoint satu sama lain atau dinotasikan $A \cap B = \emptyset$
- D.k.l : tidak ada irisan antara A dan B



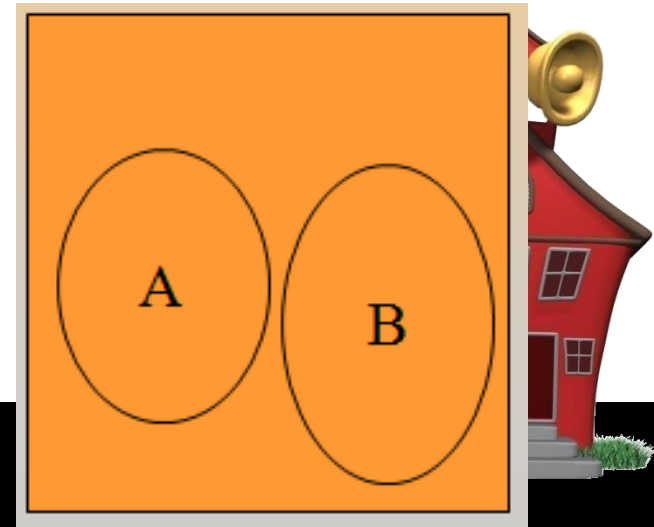
There's a difference between exclusive and exhaustive.

If events A and B are exclusive, then

$$P(A \cap B) = 0$$

If events A and B are exhaustive, then

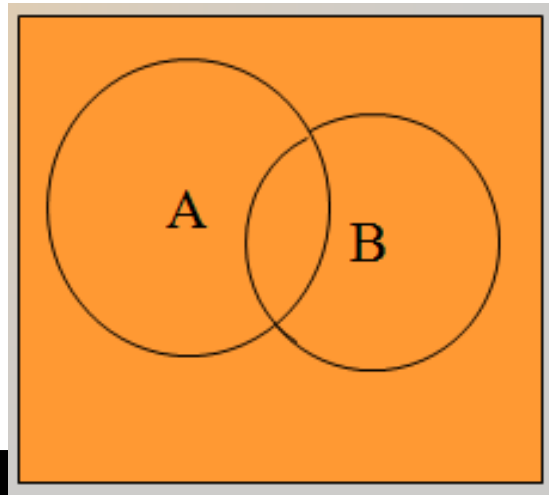
$$P(A \cup B) = 1$$



Non Mutually Exclusive Events

- Jika A dan B kejadian yang mempunyai irisan maka dapat dikatakan bahwa

$$A \cap B \neq \emptyset$$



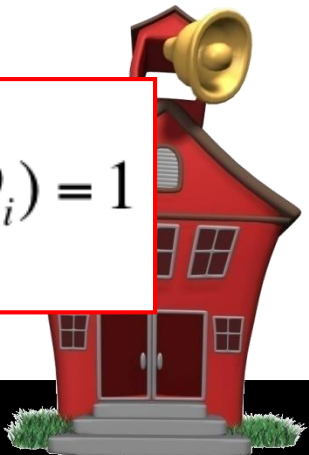
Sifat probabilitas...

(1) Bernilai antara 0 dan 1

$$0 \leq P(O_i) \leq 1 \text{ untuk setiap } i,$$

(2) Jumlahan probabilitas dari outcomes (semua kemungkinan hasil eksperimen) sama dengan 1

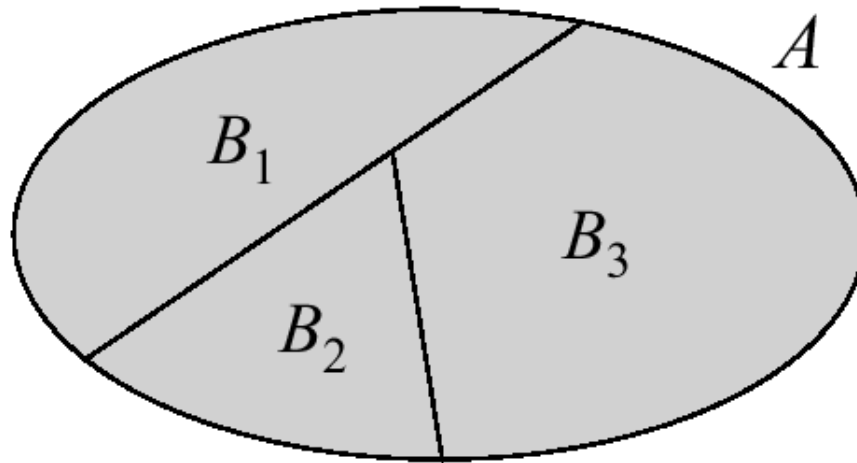
$$P(O_1) + P(O_2) + \dots + P(O_k) = 1$$


$$\sum_{i=1}^k P(O_i) = 1$$

$P(O_i)$ merupakan probabilitas outcome ke - i

Partisi suatu kejadian

- Kumpulan kejadian $\{B_1, B_2, \dots\}$ merupakan partisi dari suatu kejadian A jika memenuhi :
 - (i) $B_i \cap B_j = \emptyset$, untuk setiap $i \neq j$
 - (ii) $\cup B_i = A$



For a discrete sample space, the *probability of an event* E , denoted as $P(E)$, equals the sum of the probabilities of the outcomes in E .

Sifat-sifat probabilitas

(i) $0 \leq P(A) \leq 1$

(ii) $P(\emptyset) = 0$

(iii) $P(\Omega) = 1$

(iv) $P(A^c) = 1 - P(A)$

(v) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(vi) A and B are disjoint $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(vii) $\{B_i\}$ is a partition of $A \Rightarrow P(A) = \sum_i P(B_i)$

(viii) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$



contoh

Cth

Pelemparan satu dadu, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
dan

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = 1/6$$

maka:

$$P(\text{muncul mata dadu genap})$$

$$= P(2) + P(4) + P(6)$$

$$= 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6 = 1/2$$



Cth

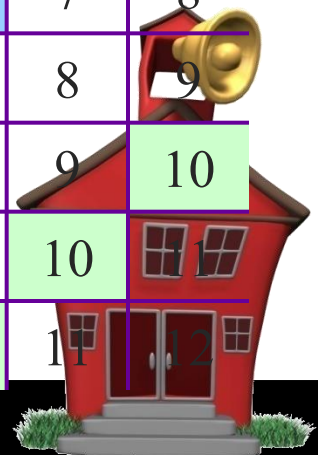
- Experimen: Pelemparan 2 dadu
Ruang sampel: $S = \{2, 3, \dots, 12\}$

$$P(2) = 1/36$$

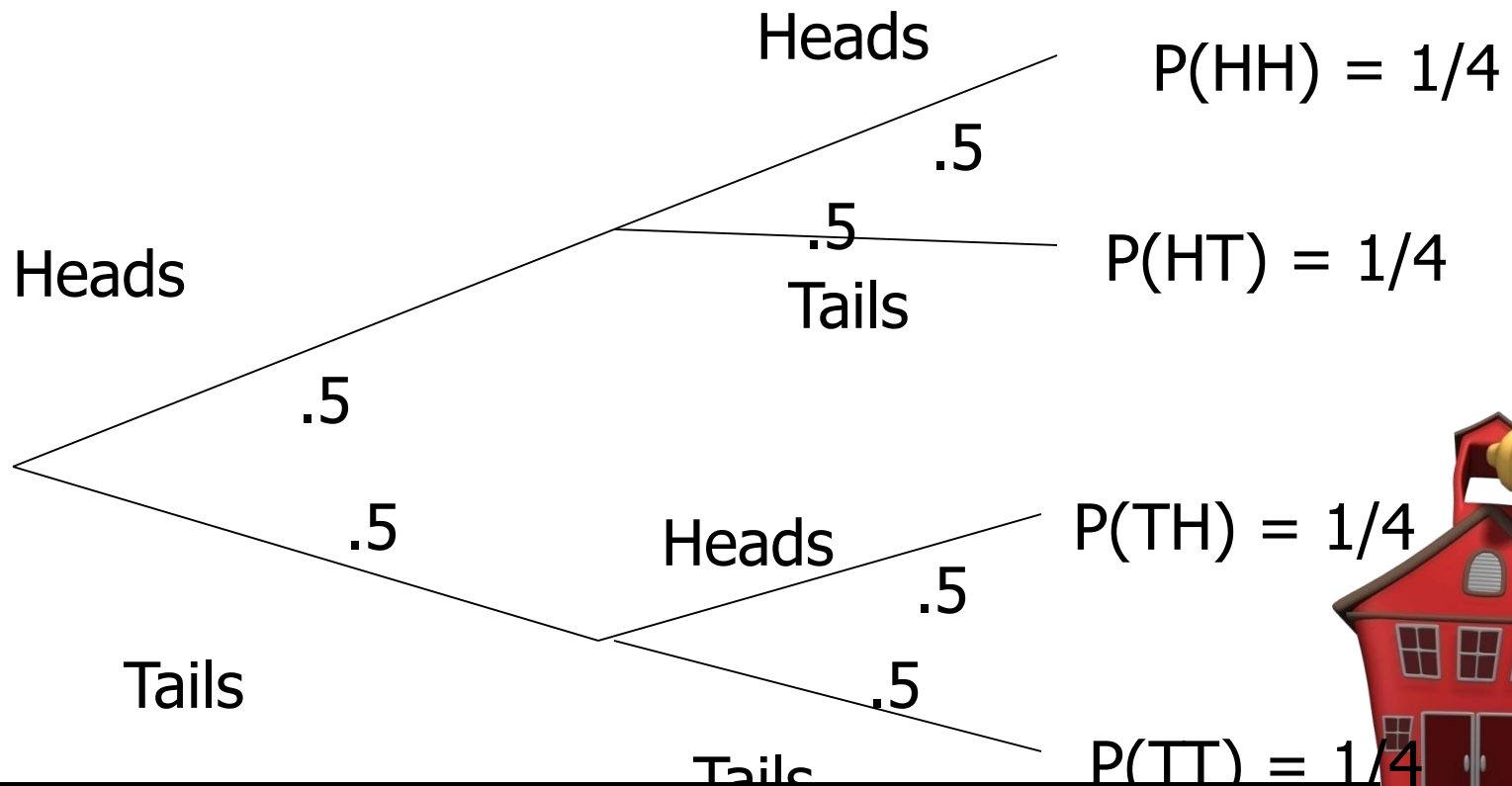
$$P(7) = 6/36$$

$$P(10) = 3/36$$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12



Cth Pohon Probabilitas: pelemparan satu koin



Conditional Probability

(Peluang bersyarat)

- Asumsikan bahwa $P(B) > 0$
- Definisi : probabilitas bersyarat dari suatu kejadian A bila diketahui kejadian B terjadi didefinisikan :

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Dengan demikian

$$P(A \cap B) = P(B)P(A | B) = P(A)P(B | A)$$



Kesalingbebasan dari suatu kejadian (independence of event)

- Definisi : Kejadian A dan B saling bebas
(independent) jika

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- Dengan demikian

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

- Demikian pula

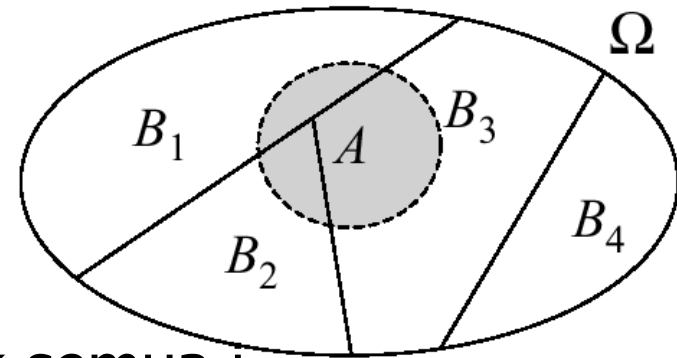
$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$$



Teorema Probabilitas Total

- Bila $\{B_i\}$ merupakan partisi dari *ruang sampel* Ω
- Lalu $\{A \cap B_i\}$ merupakan partisi dari kejadian A , maka berdasarkan sifat probabilitas

$$P(A) = \sum_i P(A \cap B_i)$$



Kemudian asumsikan bahwa $P(B_i) > 0$ untuk semua i .
Dapat didefinisikan teorema probabilitas total sbb

$$P(A) = \sum_i P(B_i)P(A | B_i)$$



Teorema Bayes

- Bila $\{B_i\}$ merupakan partisi dari *sample space* Ω
- Asumsikan bahwa $P(A) > 0$ dan $P(B_i) > 0$ untuk semua i .

Maka

$$P(B_i | A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$$

- Kemudian, berdasarkan teorema probabilitas total, kita peroleh

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_j P(B_j)P(A|B_j)}$$

- Ini merupakan teorema Bayes
 - Peluang $P(B_i)$ disebut peluang *a priori* dari event B_i
 - Peluang $P(B_i | A)$ disebut peluang *a posteriori* dari event B_i (bila diketahui event A terjadi)



Contoh

Sebuah pabrik mempunyai 3 mesin A, B dan C yang memproduksi berturut turut 60%, 30% dan 10% dari total banyak unit yang diproduksi pabrik. Persentase kerusakan produk yang dihasilkan dari masing-masing mesin tersebut berturut turut adalah 2%, 3% dan 4%. Suatu unit dipilih secara random dan diketahui rusak. Hitung probabilitas bahwa unit tersebut berasal dari mesin C.

Misal kejadian R adalah unit yang rusak, maka akan dihitung $P(C|R)$ yaitu probabilitas bahwa suatu unit diproduksi oleh mesin C dengan diketahui unit tersebut rusak



Dengan teorema Bayes, kejadian $P(A)$, $P(B)$ dan $P(C)$ adalah peluang (persentase produksi) dari masing-masing mesin; $P(R | A)$, $P(R | B)$ dan $P(R | C)$ adalah peluang (persentase kerusakan) dari masing-masing mesin.

$$\begin{aligned} P(C | R) &= \frac{P(C).P(R | C)}{P(A).P(R | A) + P(B).P(R | B) + P(C).P(R | C)} \\ &= \frac{(0,1)(0,04)}{(0,6)(0,02) + (0,3)(0,03) + (0,1)(0,04)} = \frac{4}{25} \end{aligned}$$



Faktorial, Permutasi, dan Kombinasi

- $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$
- Permutasi adalah banyaknya cara untuk menyusun x obyek yang dipilih dari n obyek dengan memperhatikan urutannya
- Formulasinya:
$$P_x^n = \frac{n!}{(n-x)!}$$
- Contoh:

Dari 3 calon pemimpin, yaitu A, B, C akan dipilih 2 orang untuk menduduki jabatan ketua dan wakil ketua. Berapa kemungkinan yang dapat terjadi?



- Banyaknya permutasi n benda yang disusun dalam suatu lingkaran :

$$P = (n-1) !$$

- Banyaknya permutasi yang berbeda dari n benda yang n_1 diantaranya berjenis I, n_2 berjenis II

$$P = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots}$$



Kombinasi

- Kombinasi adalah banyaknya cara untuk menyusun x obyek yang dipilih dari n obyek dengan mengabaikan urutannya.
- Formulasinya :

$$C_x^n = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

- Contoh:

Jika ada 3 orang pemain bulu tangkis akan dijadikan pemain ganda. Berapa kombinasi yang dapat disusun?



Contoh Soal Probabilitas

1. Peluang seorang mahasiswa lulus matematika adalah $\frac{2}{3}$ dan peluang ia lulus statistik dasar adalah $\frac{4}{9}$. Bila peluang lulus sekurang-kurangnya satu mata kuliah adalah $\frac{4}{5}$, berapa peluang ia lulus kedua mata kuliah tersebut ?



2. Populasi sarjana dalam suatu kota dikategorikan menurut jenis kelamin dan status pekerjaan.

Berapa peluang seorang laki-laki yang telah bekerja untuk menjadi duta dalam pertemuan nasional ?

Jenis kelamin	Bekerja	Menganggur
Laki-laki	460	40
Perempuan	140	260



No 3

Suatu *survey* dilakukan untuk mengetahui respon konsumen terhadap 3 produk yang dihasilkan perusahaan, yaitu produk A, B, dan C. Responden diminta untuk menjawab pertanyaan mengenai produk mana yang pernah ia beli. Berdasarkan sampel sebanyak 70 responden di daerah tersebut diperoleh informasi sebagai berikut:

- 30 responden menyatakan pernah membeli A
- 20 responden menyatakan pernah membeli B
- 25 responden menyatakan pernah membeli C
- 7 responden menyatakan pernah membeli A dan B
- 11 responden menyatakan pernah membeli A dan C



Lanjutan soal

Berdasarkan sampel hasil *survey* tersebut, tentukan probabilitas seorang responden:

- a. pernah membeli 1 barang
- b. tidak pernah membeli barang A atau B atau C.



No 4

Suatu perusahaan melakukan survey mengenai pendapat konsumen terhadap produk yang ia hasilkan. Data berikut ini menunjukkan pendapat responden terhadap produk tersebut.

Responden	Pendapat		
	Sangat Puas (SP)	Puas (P)	Kurang Puas (KP)
Dewasa (D)	40	20	30
Remaja (R)	20	40	10
Anak-anak (A)	30	10	50

Jika dipilih seorang responden secara random, tentukan probabilitas bahwa ia:

- a. remaja atau berpendapat sangat puas
- b. dewasa atau remaja
- c. dewasa atau berpendapat kurang puas.



5. Terdapat dua buah kantong berisikan bola biru dan merah. Kantong pertama terdiri atas 3 bola merah dan 3 bola biru. Pada kantong kedua terdapat 2 bola merah dan 1 bola biru. Jika diambil satu bola dari kantong pertama secara acak dan tanpa melihat warnanya lalu bola tersebut dimasukkan ke dalam kantong kedua, berapa probabilitas jika diambil satu bola acak dari kantong kedua, warna bola ini adalah biru?



6. Sebuah koin tidak seimbang sehingga probabilitas munculnya angka adalah dua kali lebih besar dari probabilitas munculnya gambar. Dari 3 kali pelemparan, berapa probabilitas munculnya 2 gambar?



7. Suatu perusahaan memiliki 3 buah pabrik B_1 , B_2 , dan B_3 yang masing-masing memasok sebanyak 30%, 25%, dan 45% kebutuhan perusahaan. Dari data masa lalu diketahui tingkat cacat produk yang dihasilkan masing-masing pabrik berturut-turut adalah 2%, 3%, dan 2%.
- Jika diambil sebuah produk jadi di kantor perusahaan, berapa probabilitas produk tersebut adalah cacat?
 - Jika produk yang diambil adalah cacat, berapa probabilitas produk tersebut berasal dari pabrik B_2 ?

