Probabilitas & Distribusinya

- Variabel *x* merupakan variabel random jika nilainya berhubungan dengan kejadian random
- *pdf=probability densitas function*, dinotasikan

$$f(x) = P(X = x)$$

merupakan probabilitas variabel *X* di nilai *x*.

- *cdf=cumulatif densitas function*, dinotasikan

$$F(x) = P(X \leq x)$$

merupakan probabilitas variabel *X* mengambil nilai *x* atau lebih kecil dari *x*.

Rumus

- X Diskrit

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{X \le x} f(x)$$

- X Kontinu

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$$

Sifat fungsi probabilitas:

- X Diskrit

$$0 \le f(x) \le 1$$

$$\sum f(x) = 1$$

Rata –rata dan Variansi

- Rata-rata (expected value) variabel random *x* dengan distribusi probabilitas *f(x)* :

$$E(X) = \sum x\, f(x)$$

- Variansi variabel random *x* dengan distribusi probabilitas *f(x)* dirumuskan :

$$Var(X) = E\left[(x-\mu)^2\right] = \sum (x-\mu)^2\, f(x)$$

Contoh Soal

1. Dalam pelemparan 2 koin dengan permukaan H dan T. Jika *x* adalah kejadian munculnya permukaan H maka tentukan distribusi probabilitas untuk *x* !
2. Variabel X diskrit ; 0, 1, 2, 3, 4 dengan pdf

$$p(x) = \frac{4!}{x!(4-x)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{4-x}$$

   Tentukan distribusi probabilitasnya (pdf dan cdfnya) !

$$P(X = x; p) = p^x (1 - p)^{1-x},$$

dengan $x = 0, 1$ (gagal, sukses) dan p adalah peluang mendapatkan hasil sukses.

Sifat-sifat Eksperimen Bernoulli

- tiap usaha (*trial*) menghasilkan satu dari dua hasil yang mungkin, dinamakan sukses (S) dan gagal (G);
- peluang sukses, $P(S) = p$ dan peluang gagal $P(G) = 1 - p$, atau $P(G) = q$;
- usaha-usaha tersebut independen

Distribusi Bernoulli

Eksperimen dengan hanya dua hasil yang mungkin
Contoh

- melempar mata uang logam satu kali
- Mengamati telur ayam, apakah anak ayam itu jantan atau betina
- Mengamati kedelai yang ditanam, tumbuh atau tidak
- Reaksi obat pada tikus, positif atau negatif

(Danardono, 2011)

Distribusi Probabilitas Binomial

- Karakteristik :

1. Eksperimen terdiri dari *n* trials
2. Trial Independen
3. Setiap trial mempunyai dua kemungkinan kejadian (ex: sukses *S* dan gagal *F*)

   $P(S)=p, P(F)=q=1-p$

4. Variabel random diskrit

- Rumus :

$$P(X = x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}, \quad x = 0,1,2,\ldots,n$$

- Rata-rata : $E[X] = np$

- Variansi :

$$Var(X) = npq$$

Contoh

Setiap sampel air yang diambil mempunyai kemungkinan 10% mengandung polutan organik. Asumsikan sampel saling independen maka tentukan probabilitas pada 18 sampel yang diambil terdapat tepat 2 sampel berisi polutan!

$$P(X=2)=\binom{18}{2}(0.1)^2(0.9)^{16}$$

Example

1. Probabilitas seseorang dapat tepat menembak sasaran adalah 0.8. Misal dia mempuyai hanya mempunyai kesempatan 4 kali menembak maka

- Berapa probabilitas setidaknya penembak tepat menembak jitu dua kali?
- Berapa probabilitas penembak tepat menembak setidaknya sekali?

Distribusi Poisson

- Distribusi Poisson biasanya digunakan distribusi probabilitas terjadinya kejadian langka (jarang) atau berdasarkan satuan waktu/ ruang.
- Rumus :

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0,1,2,\ldots$$

$$E[X] = \lambda, \quad Var(X) = \lambda$$

Sifat

- banyaknya sukses terjadi dalam suatu selang waktu atau daerah tertentu tidak terpengaruh (bebas) dari apa yang terjadi pada interval waktu atau daerah yang lain,
- peluang terjadinya sukses dalam interval waktu yang singkat atau daerah yang sempit sebanding dengan panjang interval waktu, atau luas daerah dan tidak tergantung pada banyaknya sukses yang terjadi di luar interval waktu atau daerah tersebut,
- peluang terjadinya lebih dari satu sukses dalam interval waktu yang singkat atau daerah yang sempit tersebut dapat diabaikan.

Cth

Rata-rata banyaknya partikel radioaktif yang melewati suatu counter selama 1 milidetik dalam suatu percobaan di laboratorium adalah 4. Peluang 6 partikel melewati counter dalam suatu milidetik tertentu adalah

$$P(X = 6; \lambda = 4) = \frac{e^{-4}4^x}{6!} = 0,1042$$

Ex

1. Diduga terdapat 4% dari nasabah Bank tidak puas dengan pelayanan Bank tersebut. Bila dipilih secara acak 50 orang nasabah dan X= banyaknya nasabah yang tidak puas maka hitung distribusi probabilitas untuk x=0,...7 !

Distribusi Normal (Gaussian)

- Data yang paling banyak digunakan harus mengikuti distribusi Normal, Mengapa?
- Suatu eksperimen random yang diulang maka variabel random akan sama dengan total replikasi akan berkecenderungan mengikuti distribusi Normal → Teorema De Moivre → Teorema Limit Tengah (dipelajari di STATMAT 1)

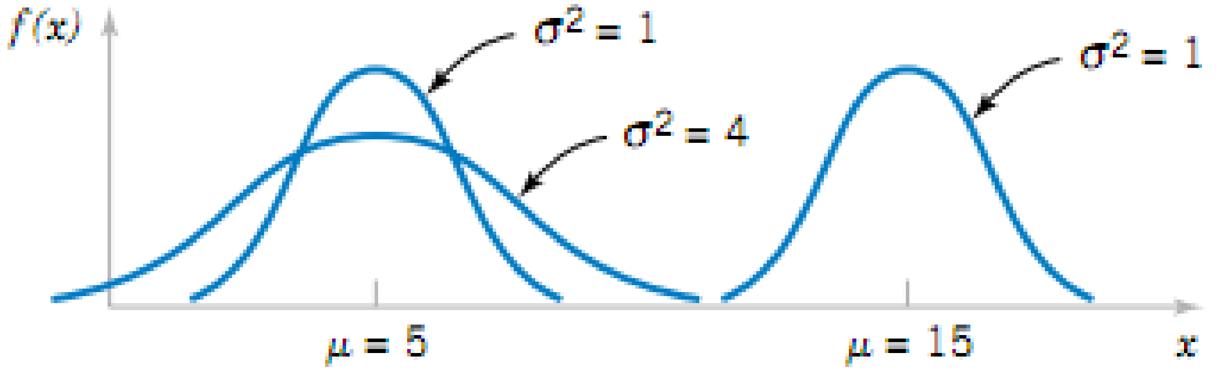
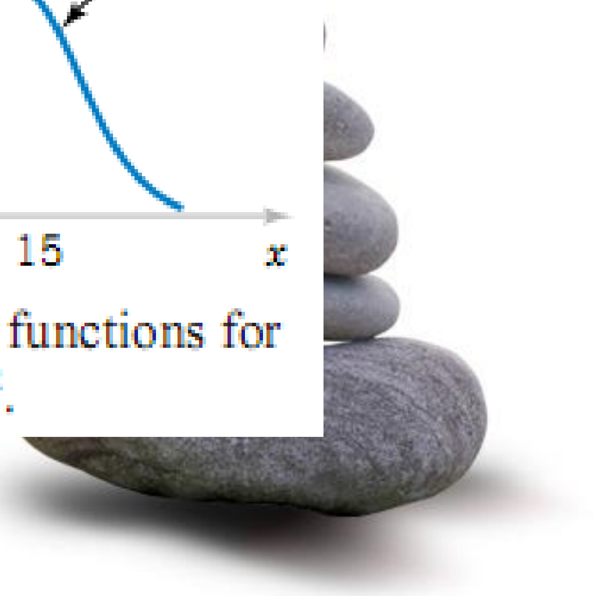


Figure 4-10 Normal probability density functions for selected values of the parameters μ and σ^2.



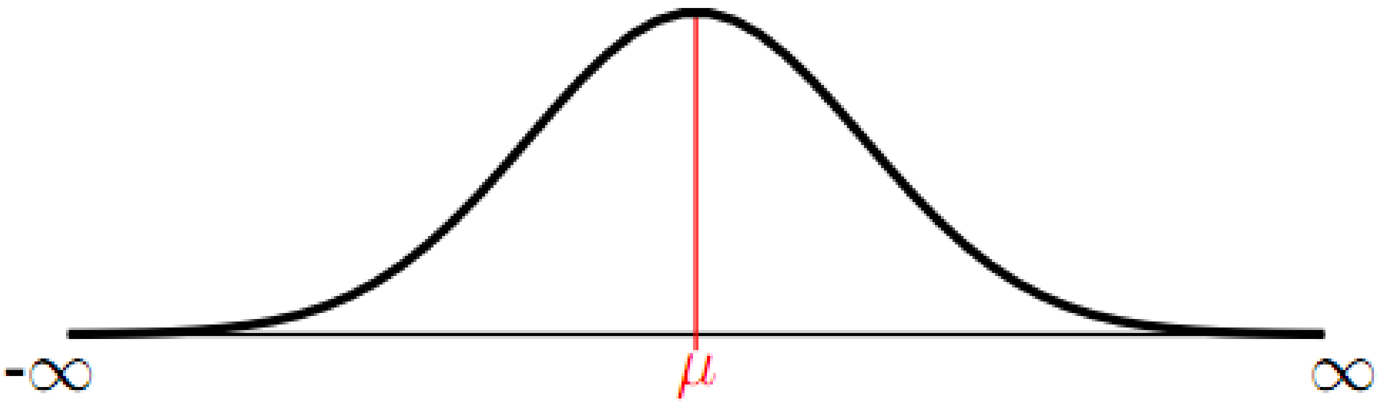
- Suatu variabel random mempunyai distribusi Normal jika pdfnya berbentuk :

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$-\infty < \mu < \infty \ \text{ dan } \quad 0 < \sigma < \infty$$

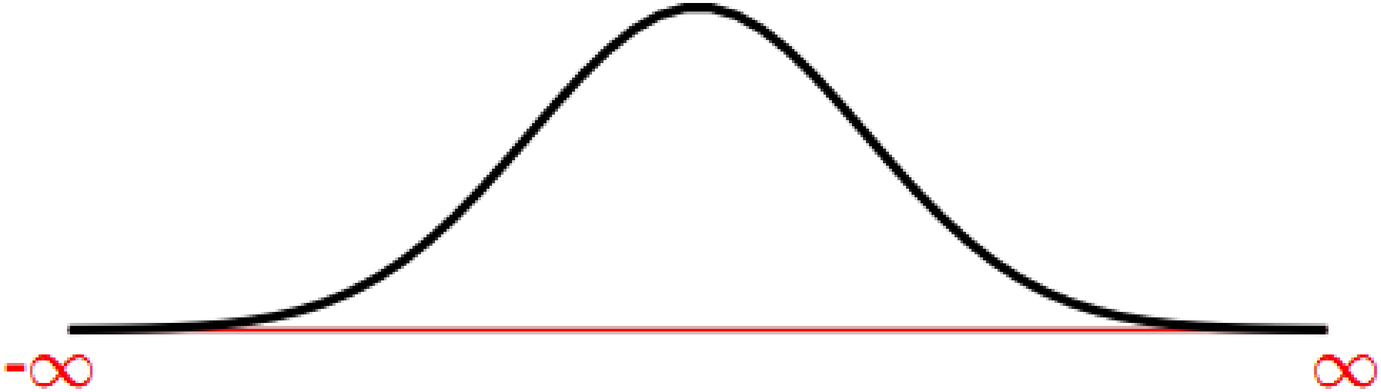
$$E(X) = \mu, \quad V(X) = \sigma^2$$

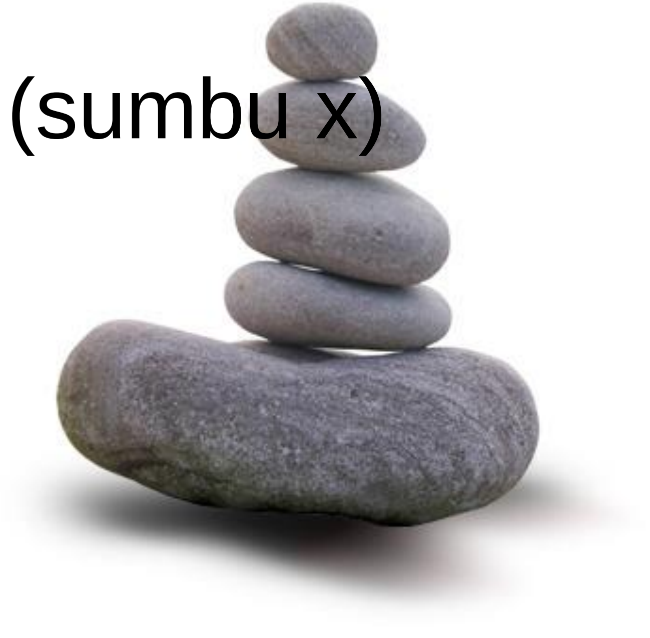
Sifat 1



- Simetri terhadap sumbu vertikal melalui μ

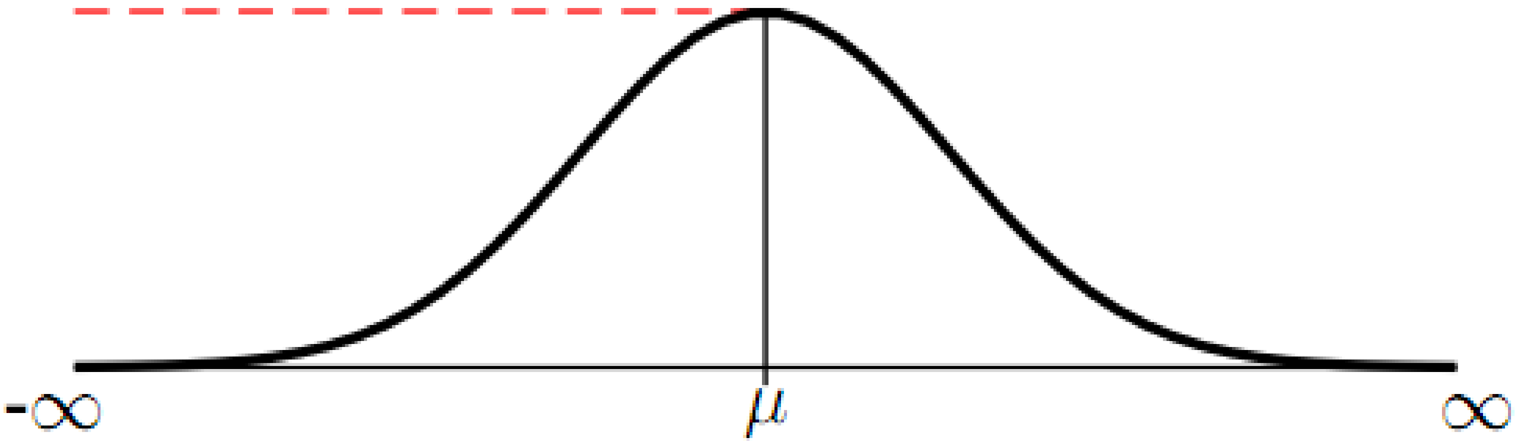
Sifat 2



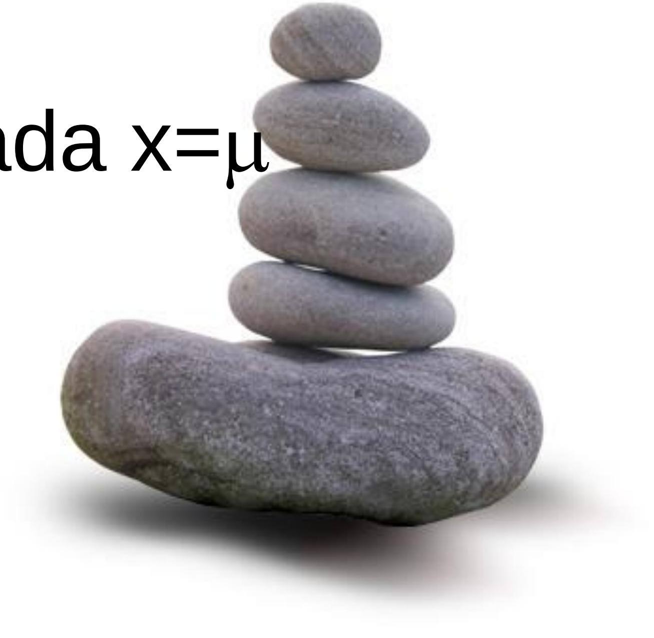


- Memotong sumbu mendatar (sumbu x) secara asimtotis

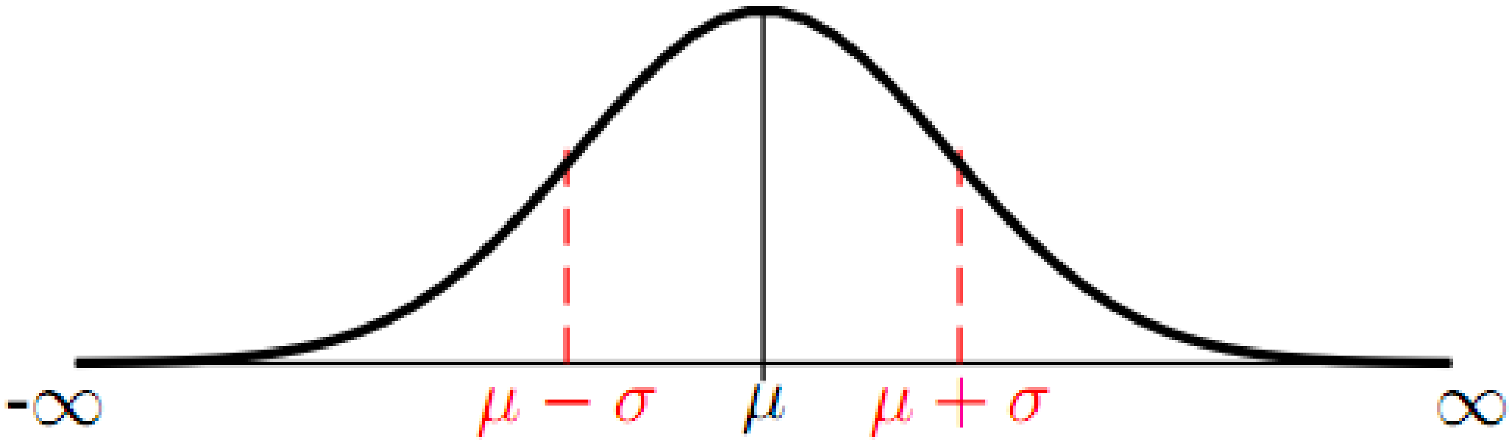
Sifat 3



- Harga maksimum terletak pada x=μ

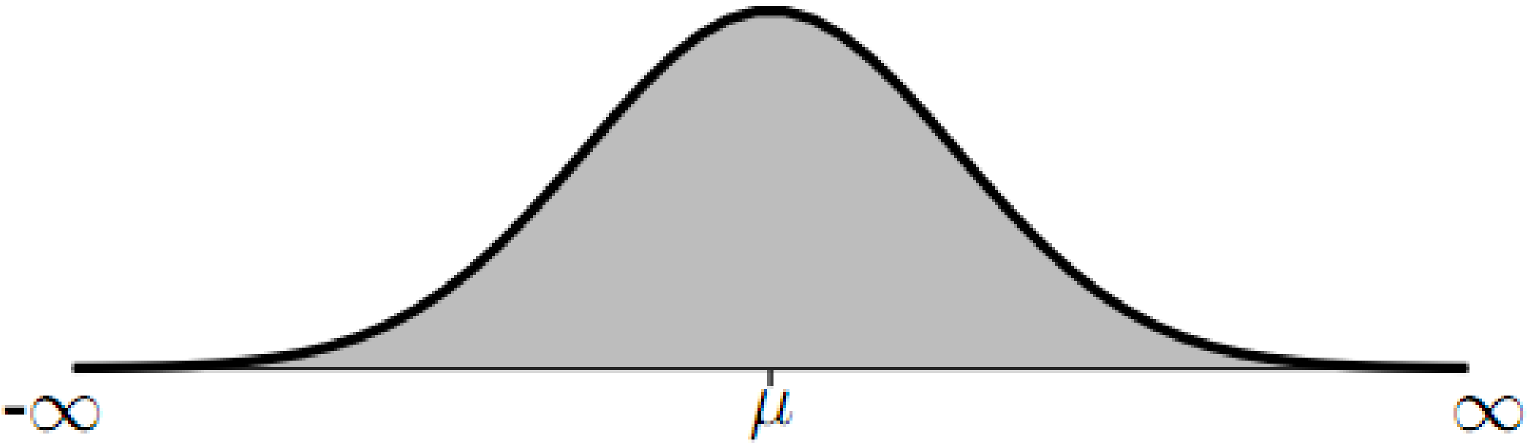


Sifat 4



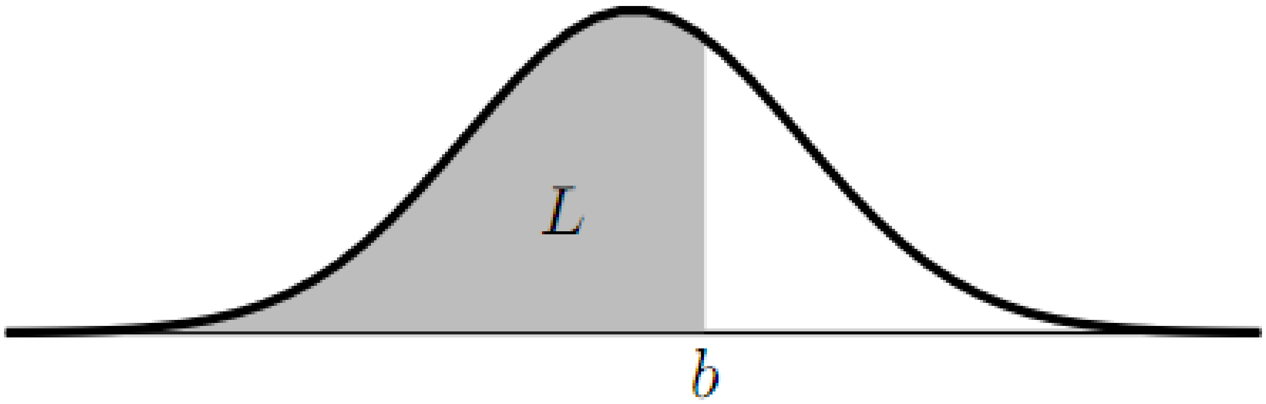
- Mempunyai titik belok pada $x=\mu\pm\sigma$

Sifat 5

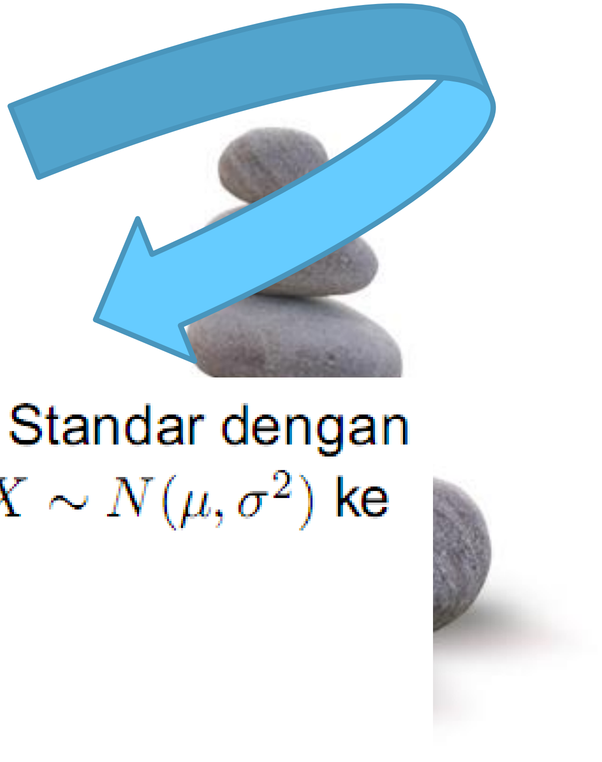


- Luas kurva Normal sama dengan 1

Menghitung luasan di bawah kurva Normal



$$L = \int_{-\infty}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx$$



Dapat dihitung menggunakan tabel Normal Standar dengan terlebih dahulu mentransformasikan skala $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ke $Z \sim N(0, 1)$,

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

PDF Normal Standar

$$\text{Jika } z = \frac{x-\mu}{\sigma} \text{ maka } \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, -\infty < z < \infty$$

$$Z \sim N(0,1)$$

A normal random variable with

$$\mu = 0 \quad \text{and} \quad \sigma^2 = 1$$

is called a **standard normal random variable** and is denoted as Z.

The cumulative distribution function of a standard normal random variable is denoted as

$$\Phi(z) = P(Z \leq z)$$

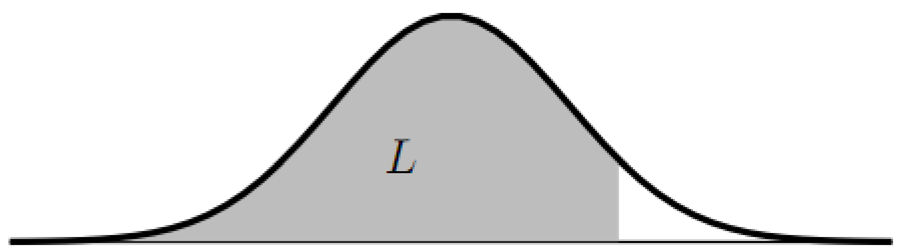
Cth

Distribusi Normal dengan mean $\mu = 60$ dan deviasi standar $\sigma = 12$, $N(60, 12^2)$

Hitunglah luas kurva Normal mulai ekor paling kiri $(-\infty)$ sampai 76

transformasi dari X ke Z,

$$\begin{aligned} Z &= \frac{X - \mu}{\sigma} \\ &= \frac{76 - 60}{12} \\ &= 1,33 \end{aligned}$$



$Z = 1,33$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.500000	0.503989	0.507978	0.511967	0.515953	0.519939	0.532922
0.1	0.539828	0.543795	0.547758	0.551717	0.555760	0.559618	0.563559
0.2	0.579260	0.583166	0.587064	0.590954	0.594835	0.598706	0.602568
0.3	0.617911	0.621719	0.625516	0.629300	0.633072	0.636831	0.640576
0.4	0.655422	0.659097	0.662757	0.666402	0.670031	0.673645	0.677242
0.5	0.691462	0.694974	0.698468	0.701944	0.705401	0.708840	0.712260
0.6	0.725747	0.729069	0.732371	0.735653	0.738914	0.742154	0.745373
0.7	0.758036	0.761148	0.764238	0.767305	0.770350	0.773373	0.776373
0.8	0.788145	0.791030	0.793892	0.796731	0.799546	0.802338	0.805106
0.9	0.815940	0.818589	0.821214	0.823815	0.826391	0.828944	0.831472
1.0	0.841345	0.843752	0.846136	0.848495	0.850830	0.853141	0.855428
1.1	0.864334	0.866500	0.868643	0.870762	0.872857	0.874928	0.876976
1.2	0.884930	0.886860	0.888767	0.890651	0.892512	0.894350	0.896165
1.3	0.903200	0.904902	0.906582	$\boxed{0.908241}$	0.909877	0.911492	0.913085
1.4	0.919243	0.920730	0.922196	0.923641	0.925066	0.926471	0.927855

Cth

Distribusi Normal dengan mean $\mu = 60$ dan deviasi standar $\sigma = 12$, $N(60, 12^2)$

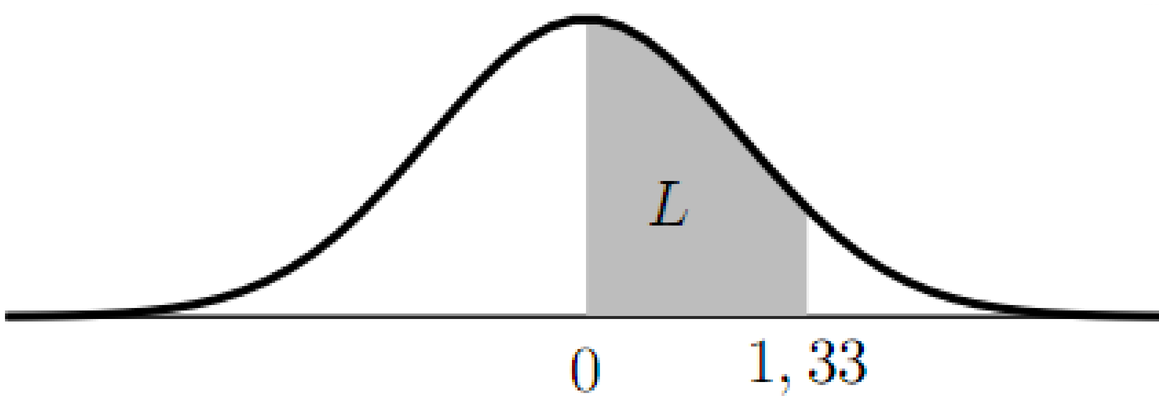
Hitunglah luas kurva Normal antara 60 sampai 76

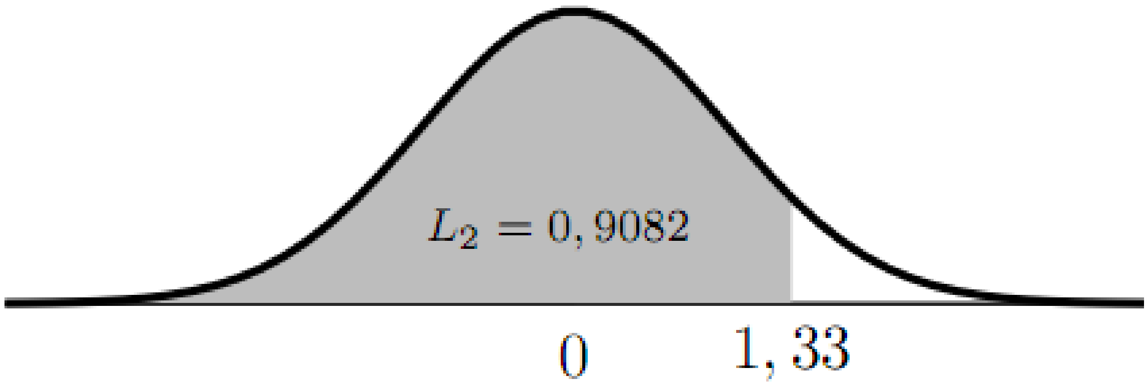
transformasi dari $X = 60$ ke Z,

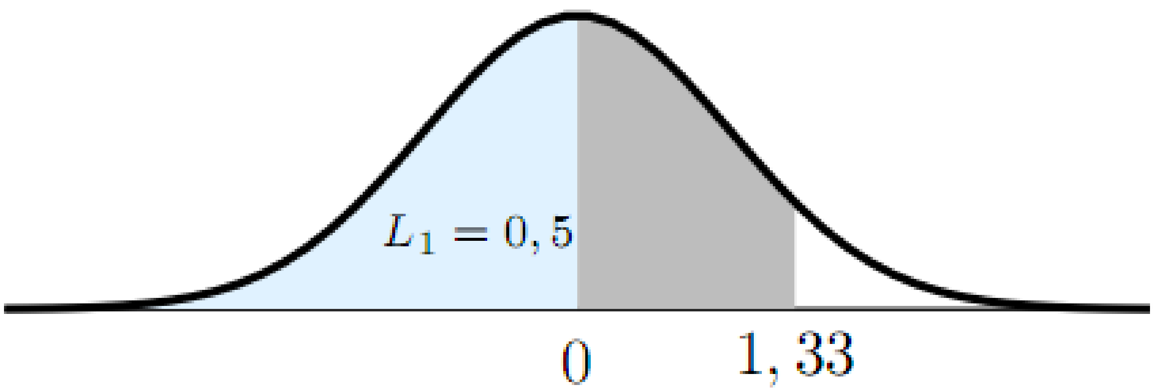
$$\begin{aligned} Z &= \frac{X-\mu}{\sigma} \\ &= \frac{60-60}{12} \\ &= 0 \end{aligned}$$

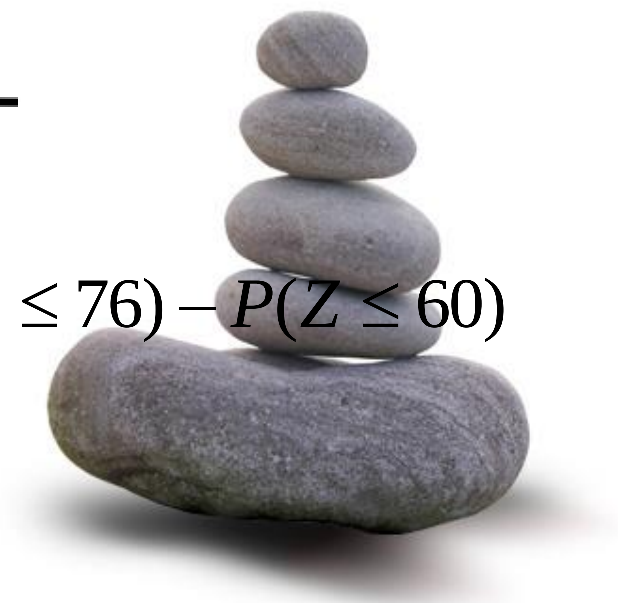
transformasi dari $X = 76$ ke Z,

$$\begin{aligned} Z &= \frac{X-\mu}{\sigma} \\ &= \frac{76-60}{12} \\ &= 1,33 \end{aligned}$$









$$P[60 < X < 76] = P(Z \leq 76) - P(Z \leq 60)$$
$$= \Phi(1.33) - \Phi(0)$$
$$= 0.9082 - 0.5$$
$$= 0.4082$$