CHAPTER 1_4

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

Panjang vektor

- Misal vektor **x**, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

- Panjang dari **x**, dinotasikan dengan **Lx** didefinisikan : $L_{\mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

- Secara umum, panjang dari vektor

$$L_{\mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Linier depen/independen

- Pasangan vektor **x** dan **y** dengan dimensi sama dikatakan linier dependen jika terdapat konstanta c1 dan c2 tidak keduanya 0 sedemikian sehingga $c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{y} = 0$
- Secara umum, $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k = 0$
- Vektor yang tidak linier dependen maka disebut dengan linier independen

contoh

- Misalkan $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$
- So... $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + c_3\mathbf{x}_3 = 0$
- Maka

$$c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ 2c_1 - 2c_3 &= 0 \\ c_1 - c_2 + c_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

Maka x1, x2 dan x3 linier indep

Definisi (Nilai Eigen dan Vektor Eigen)

- Jika **A** adalah matriks mxm maka setiap skalar λ memenuhi $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$

  Untuk mx1 vektor **x** ≠0 disebut dengan nilai eigen dari **A**, Vektor **x** disebut vektor eigen dari **A** yang berhubungan dengan nilai eigen λ
- Dapat ditulis

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0$$

x adalah vektor tak nol !

- Setiap nilai eigen λ harus memenuhi persamaan determinan

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$$

→ Persamaan karakteristik **A**

Contoh. Menentukan nilai eigen

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \left\| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \right\| = (1-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

- Nilai eigen dari **A** adalah

λ1=1, λ2=3

2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 13 & -4 & 2 \\ -4 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 10 \end{bmatrix}$

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{bmatrix} 13-\lambda & -4 & 2 \\ -4 & 13-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 10-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + 36\lambda^2 - 405\lambda + 1458 = 0$$

$$\lambda^3 - 36\lambda^2 + 405\lambda - 1458 = 0$$

$$(\lambda - 9)(\lambda - 9)(\lambda - 18) = 0$$

Nilai eigen dari **A** adalah 9,9 dan 18

Contoh lain...

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

- Step 1. Menentukan persamaan karakteristik **A**

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{bmatrix} 5-\lambda & -3 & 3 \\ 4 & -2-\lambda & 3 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 10 = 0$$

$$-(\lambda - 5)(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

Step 2. Menentukan nilai Eigen **A**

$\lambda 1=5$,
$\lambda 2=2$,
$\lambda 3=1$

- Step 3. mencari vektor eigen **A ; Bersesuaian dengan** λ1=5

→**Selesaikan** $\mathbf{Ax} = 5\mathbf{x}$

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 5x_1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 5x_2 \\ 4x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 5x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(a) \\ 4x_1 + 3x_3 &= 7x_2 \ldots.(b) \\ x_1 &= x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(c) \end{aligned}$$

- Jika $x_2 = 1 \Rightarrow x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$
- Vektor eigen **A** yang bersesuaian dengan λ1=5 adalah $x = (1,1,1)^T$
- Perhatikan pers (a) dan (c) → vektor eigen tidak tunggal

- Step 3. mencari vektor eigen **A ; Bersesuaian dengan** λ2=2

→**Selesaikan** $\mathbf{Ax} = 2\mathbf{x}$

$$
\begin{aligned}
5x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 2x_1 \\
4x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2x_2 \\
4x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 2x_3
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{aligned}
-3x_2 + 3x_3 &= -7x_1 \\
4x_1 + 3x_3 &= 4x_2 \\
4x_1 - 4x_2 &= 7x_3
\end{aligned}
$$

jika $x_1 = 1, x_2 = 1 \Rightarrow x_3 = 0$

Vektor eigen **A** yang bersesuaian dengan λ2=2 adalah $x = (1,1,0)^{\mathbf{T}}$

◦ Step 3. mencari vektor eigen **A ; Bersesuaian dengan** λ3=1

→**Selesaikan** $\mathbf{Ax} = \mathbf{x}$

$$5x_1 - 3x_2 + 3x_3 = x_1$$
$$4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = x_2$$
$$4x_1 - 4x_2 + 5x_3 = x_3$$

$$-3x_2 + 3x_3 = -4x_1$$
$$4x_1 + 3x_3 = 3x_2$$
$$4x_1 - 4x_2 = -4x_3$$

jika $x_1 = 0, x_2 = 1 \Rightarrow x_3 = 1$

Vektor eigen **A** yang bersesuaian dengan λ3=1 adalah $x = (0,1,1)^T$

- Step 4. cari vektor eigen ternormalisasi

→Panjang vektor eigen bersesuaian λ1=5

$$\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$$

→ Panjang vektor eigen bersesuaian λ1=5

$$\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$$

→Panjang vektor eigen bersesuaian λ1=5

$$\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

Vektor Eigen yang bersesuaian dengan nilai Eigen 5, 2 dan 1 adalah

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T,\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^T,\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$$