Chapter 1

Matriks Aljabar dan Vektor Random

1. Pengantar
2. Penjumlahan, pengurangan, perkalian Matrik dengan skalar
3. Variansi dan Kovariansi Matrik
4. Determinan Matrik
5. Invers Matrik

1. Pengantar

Contoh Matrik:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad 2 \times 4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 10 \end{bmatrix} \quad 4 \times 3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad 2 \times 2$$

Misal matrik nilai dalam penelitian pendidikan , akan dinyatakan dalam bentuk matrik 6 subjek dalam 3 variabel

$$\begin{array}{c} \\ \\ \text{Subjects} \end{array} \begin{array}{c} \textit{Variables} \\ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{bmatrix} 10 & 4 & 18 \\ 12 & 6 & 21 \\ 13 & 2 & 20 \\ 16 & 8 & 16 \\ 12 & 3 & 14 \\ 15 & 9 & 13 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matrik 6 x 3

Secara umum, matrik A berdimensi rxs maka dimensi transpose A adalah sxr

- Secara umum, matrik N x p dinyatakan :

$$\begin{array}{c} \\ \text{Subjects} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & \multicolumn{5}{c}{\textit{Variables}} \\ & 1 & 2 & 3 & & p \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \\ N \end{array} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & x_{N3} & \cdots & x_{Np} \end{bmatrix} \end{array}$$

- Transpos matrik A

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Baris A menjadi kolom A'

→ Matrik dengan baris tunggal disebut dengan vektor baris

→ Matrik dengan kolom tunggal disebut dengan vektor kolom

→ Vektor biasanya dinyatakan dengan huruf kecil

→ Vektor baris dengan tanda transpose **x′**, **y′**

→ Matrik atau vektor dengan huruf tebal

→ Contoh

$\mathbf{x}' = (1, 2, 3)$

1 × 3 row vector

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$ 4 × 1 column vector

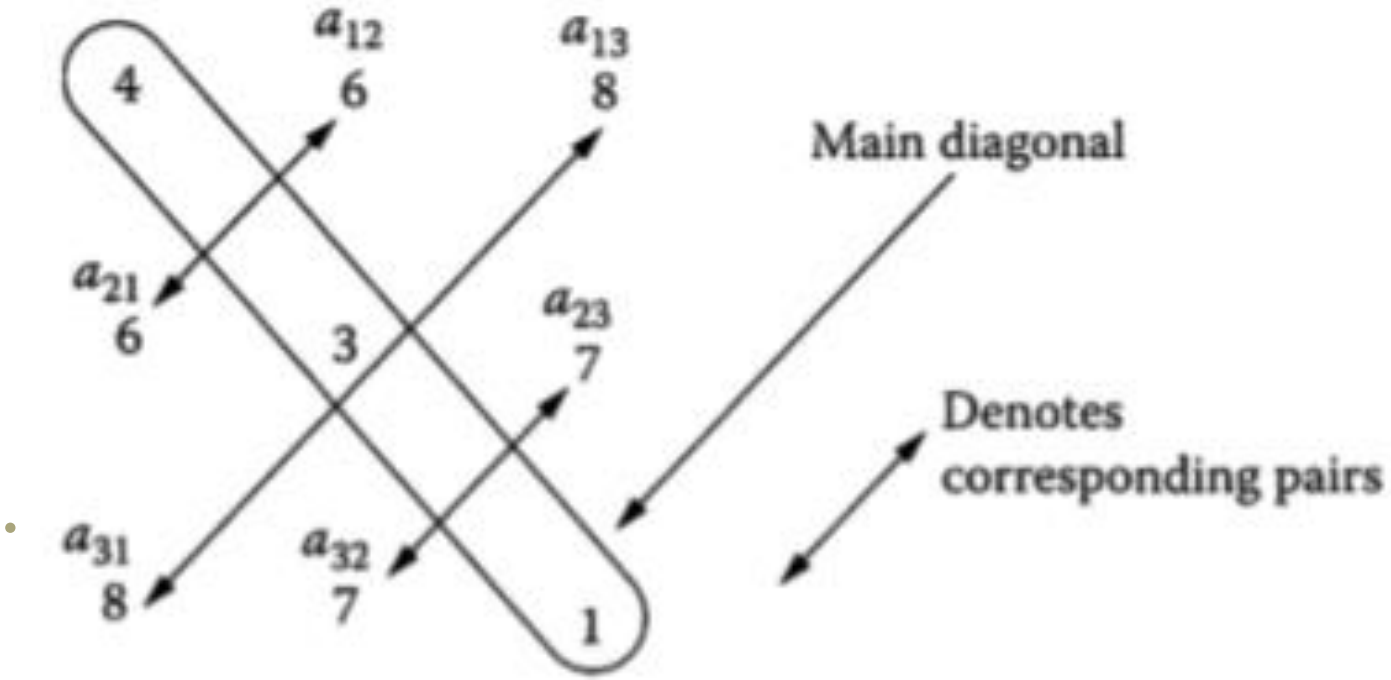
- Misal 100 subjek diukur skor psikologinya, kemudian ditentukan rerata pada 5 subskala. Representasi 5 rerata sebagai vektor kolom dan transpose - nya:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 24 \\ 31 \\ 22 \\ 27 \\ 30 \end{bmatrix} \rightarrow \quad \mathbf{x}' = (24, 31, 22, 27, 30)$$

-

Matrik simetrik

- Matrik A dikatakan simetrik jika elemen pada diagonal utama merupakan cermin dari elemen di atas diagonal utama. Untuk matrik 3x3, berarti a12=a21, a13=a31, a23=a32



- Secara general, matrik A simetrik jika $a_{ij} = a_{ji}, \quad i \neq j$
- Contoh

	VR	*NA*	*Cler.*	*Mech.*
Verbal Reas.	1.00	.70	.19	.55
Numerical Abil.	.70	1.00	.36	.50
Clerical Speed	.19	.36	1.00	.16
Mechan. Reas.	.55	.50	.16	1.00

Matrik di atas simetrik

Korelasi VR – NA sama dengan NA-VR

Penjumlahan Matrik

- Matrik dapat dijumlahkan jika mempunyai dimensi yang sama
- Contoh

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{bmatrix}\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}6 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2+6 & 3+2\\ 3+2 & 4+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 5\\ 5 & 9\end{bmatrix}$$

contoh

$$\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 4 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}$$ = ??

Pengurangan dan perkalian dg skalar

- Pengurangan matrik juga dapat dilakukan jika matrik berdimensi sama

$$\underset{\mathbf{A}}{\begin{bmatrix}2 & 1 & 5\\ 3 & 2 & 6\end{bmatrix}} - \underset{\mathbf{B}}{\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 5\end{bmatrix}} = \underset{\mathbf{A-B}}{\begin{bmatrix}1 & -3 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}}$$

- Perkalian dengan skalar

$$2(3,1,4) = (6,2,8) \qquad 1/3\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4/3\\1\end{bmatrix}$$

$$4\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8 & 4\\ 4 & 20\end{bmatrix}$$

perkalian Matrik

- Dua matrik **AB** dapat dikalikan jika jumlah kolom **A** sama dengan baris **B**
- Dua matrik yang dapat dikalikan disebut dengan *conformable*

contoh

$$\underset{2\times 3}{\mathbf{A}}\quad \underset{3\times 2}{\mathbf{B}}\quad \underset{2\times 2}{\mathbf{C}}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$c_{11} \quad (2,1,3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2(1)+1(2)+3(-1)=1 \qquad c_{21} \quad (4,5,6)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 4(1)+5(2)+6(-1)=8$$

$$c_{12} \quad (2,1,3)\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 2(0)+1(4)+3(5)=19 \qquad c_{22} \quad (4,5,6)\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 4(0)+5(4)+6(5)=50$$

Diperoleh

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 19 \\ 8 & 50 \end{bmatrix}$$

Ingat.. Perkalian matrik tidak berlaku komutatif!

AB≠BA

$$\underset{A}{\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}}\underset{B}{\begin{bmatrix}3 & 5\\ 5 & 6\end{bmatrix}}=\underset{AB}{\begin{bmatrix}2\cdot3+1\cdot5 & 2\cdot5+1\cdot6\\ 1\cdot3+4\cdot5 & 1\cdot5+4.6\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}11 & 16\\ 23 & 29\end{bmatrix}$$

$$\underset{B}{\begin{bmatrix}3 & 5\\ 5 & 6\end{bmatrix}}\underset{A}{\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}}=\underset{BA}{\begin{bmatrix}3\cdot2+5\cdot1 & 3\cdot1+5\cdot4\\ 5\cdot2+6\cdot1 & 5\cdot1+6\cdot4\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}11 & 23\\ 16 & 29\end{bmatrix}$$

Contoh lain

$$\underset{(3\times3)}{\underset{A}{\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & 4 & 5\\ 2 & 5 & 2\end{bmatrix}}}\underset{(3\times1)}{\underset{x}{\begin{bmatrix}2\\ 6\\ 3\end{bmatrix}}}=\underset{(3\times1)}{\underset{Ax}{\begin{bmatrix}18\\ 41\\ 40\end{bmatrix}}}$$

$$(2,5)\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}=(11,22)$$

$$(4,2)\begin{bmatrix}10 & 3\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 2\end{bmatrix}=(46,20)\begin{bmatrix}4\\ 2\end{bmatrix}=184+40=224$$