MATRIKS GRAMIAN

By:
Aulia Chairunnisa
Deni Indriyani

- Matriks A disebut matriks Gramian apabila dapat ditemukan matriks B sedemikian hingga berlaku $A=B^tB$ atau $A=BB^t$
- Matriks SSCP yang dibicarakan didepan adalah salah satu contoh matriks Gramian.

Berikut ini adalah beberapa sifat matriks Gramian:

- Setiap matriks simetris yang seluruh determinan minor utamanya non-negatif adalah matriks Gramian.
- Setiap nilai eigen dari matriks Gramian G adalah non-negatif. Jika G matriks Gramian non-singular, maka seluruh nilai eigen dari G adalah positif.
- Misalnya G adalah matriks Gramian. Dibentuk persamaan $Q=x^tGx$ maka untuk setiap x yang tidak nol, nilai Q selalu non-negatif. Matriks Q disebut matriks semi definit positif. Jika G adalah singular maka Q disebut matriks definit positif

contoh

- Diketahui matriks adalah matriks Gramian yang non-singular (sebab A adalah matriks SSCP) karena itu maka matriks Q sedemian hingga adalah definit positif sebab setiap tidak sama dengan nol, akan menghasilkan Q yang posiif.

soal

- Dibentuk matriks Q sedemikian hingga

  $$Q = [x \quad y]\mathrm{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

  Matiks Q ini disebut matriks dalam bentuk kuadrat (quadratic form). Jelaskan apakah Q definit positif atau tidak, jika:

a. A=$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$
b. A=$\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$
c. A=$\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

Dengan Mencari Nilai Eigen dari A

a. Matriks simetrik A=$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

   mempunyai nilai eigen

   $\lambda = \frac{11+\sqrt{37}}{2}$=8,54 dan $\lambda = \frac{11-\sqrt{37}}{2}$=2,46

   karena keduanya positif maka matriks A adalah definit positif. Dan untuk semua x≠0

   $$x^t A x = 5x^2 + 6xy + 5y^2 > 0$$

b. Matriks simetrik =$\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

mempunyai nilai eigen

$\lambda = \frac{1+\sqrt{157}}{2}$=6,76 dan $\lambda = \frac{1-\sqrt{157}}{2}$=-5,76

Karena salah satu nilai eigen negatif maka matriks A bukan definit positif.

c. Matriks simetrik A=$\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

mempunyai nilai eigen $\lambda = 0 \ dan \ \lambda = 11$

Karena nilai eigen dari matriks A adalah non-negatif maka matriks A adalah semi definit positif. Dan untuk semua x,

$$x^t Ax = 5x^2 + 13xy + 6y^2 \geq 0$$

Dengan Mencari Determinan Minor Utama / Determinan Submatrik Utama dari A

a. Matriks simetris A=$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

$\det(A_1) = |5| = 5$, $\det(A_2)$=$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 21$

Determinan minor utama semuanya positif. Jadi, matriks A adalah definit positif karena menjamin semua nilai eigen A adalah positif dan $x^t Ax > 0$ untuk semua $x \neq 0$

b. Matriks A=$\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

$\det(A_1) = |-5| = -5$, $\det(A_2)$=$\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$=-39

mempunyai determinan negatif. Jadi, matriks A bukan definit positif.

c. Matriks A=$\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

$\det(A_1) = |5| = 5,\ \det(A_2)$=$\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$=0

mempunyai determinan non-negatif. Jadi, matriks A adalah semi definit positif sehingga $x^t A x \geq 0$ untuk semua x

SEKIAN