UJI Z MULTIVARIAT

BY :

1. ESTHI PUTRI H (K1311029)
2. FARADILA W (K1311033)
3. FARAH FAIZAH (K1311034)

Asumsi-asumsi

- Matriks variansi dan kovariansi pada dua populasi harus sama
- Nilai-nilai dari variabel terikat pada masing-masing populasi harus berdistribusi normal multivariat

Statistik uji Z digunakan jika variansi populasi diketahui

Senada dengan statistik uji t,statistik uji Z dapat dikembangkan untuk statistik uji multivariat sebagai berikut :

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \sqrt{n}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\left(\bar{X} - \mu_0\right)$$

Jika kedua ruas formula tersebut dikuadratkan,diperoleh :

$$Z^2 = (n)\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)\left(\bar{X} - \mu_0\right)^2$$

$$= (n)(\bar{X} - \mu_0)(\frac{1}{\sigma^2})(\bar{X} - \mu_0)$$

$$= (n)(\bar{X} - \mu_0)(\sigma^2)^{-1}(\bar{X} - \mu_0)$$

Berdasarkan formula terakhir,dikembangkan formula Z^2 untuk multivariat sebagai berikut :

$$Z^2 = (n)(\bar{X} - \mu_0)'(\Sigma)^{-1}(\bar{X} - \mu_0)$$

Karena

$$Z^2_{\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{\alpha}$$

Maka formula tersebut menjadi

$$\chi^2 = (n)(\bar{X} - \mu_0)'(\sum)^{-1}(\bar{X} - \mu_0)$$

Yang berdistribusi chi kuadrat dengan derajat kebebasan p,dengan n adalah banyaknya data

$$\overline{X} - \mu_0 = \begin{bmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \cdots \\ \overline{X}_p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{01} \\ \mu_{02} \\ \cdots \\ \mu_{0p} \end{bmatrix}$$

p = banyaknya variabel terikat

Σ = matriks kovariansi dari p variabel terikat yang diketahui,pada populasi.

Pada uji mengenai rataan multivariat dengan p variabel terikat ini,susunan hipotesis nol-nya juga seperti berikut:

$$H_0 : \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{01} \\ \mu_{02} \\ \dots \\ \mu_{0p} \end{bmatrix}$$

Ho ditolak jika :

$$\chi^2_{obs} > \chi^2_{\alpha ; p}$$

CONTOH 3

Pada ujian matematika, yang terdiri dari dua bagian yaitu aljabar dan geometri, ingin diuji apaka rerata aljabarnya adalah 6 dan rerata geometrinya adalah 6.5. Lima orang yang diambil sebagai sampel dan nilai-nilai mereka adalah sebagai berikut.

No Subjek	Nilai Aljabar	Nilai Geometri
1	6	7
2	7	8
3	5	7
4	6	6
5	6	6

Jika diketahui variansi populasi untuk nilai-nilai aljabar sebesar 0.5, variansi populasi untuk nilai-nilai geometri sebesar 0.6 dan kovariansi populasi untuk nilai-nilai aljabar dan geometri sebesar 0.2 dan dengan mengambil tingkat signifikansi 5%, bagaimana kesimpulan penelitian?

JAWAB:

a. Hipotesis

$$H_0 : \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6.5 \end{bmatrix}$$

$$H_1 : \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 6 \\ 6.5 \end{bmatrix}$$

Dengan μ_1 merupakan rerata aljabar dan μ_2 merupakan rerata geometri.

b. Tingkat Signifikansi

$$\alpha = 0.05$$

c. Statistik Uji yang digunakan

$$\chi^2 = (n)(\overline{X} - \mu_0)'(\sum)^{-1}(\overline{X} - \mu_0) \sim \chi^2_{(p)}$$

d. Komputasi

	Aljabar (X1)	Geometri (X2)
	6	7
	7	8
	5	7
	6	6
	6	6
Jumlah	30	34
Rerata	$\overline{X}_1 = 6$	$\overline{X}_2 = 6.8$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{(0.5)(0.6) - (0.2)(0.2)} \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 \\ -0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{0.26} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2.3077 & -0.7692 \\ -0.7692 & 1.9231 \end{bmatrix}$$

$$\overline{X} - \mu_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 6.8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 \\ 6.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

$$\chi^2_{obs} = 5\begin{bmatrix} 0 & 0.3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2.3077 & -0.7692 \\ -0.7692 & 1.9231 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

$$= 5\begin{bmatrix} -0.23076 & 0.57693 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

$$= 5\begin{bmatrix} 0.173079 \end{bmatrix} = 0.865395$$

e. Daerah Kritis

$$\chi^2_{0.05;2} = 5.991$$

$$DK = \left\{ \chi^2 \mid \chi^2 > 5.591 \right\}$$

$$\chi^2_{obs} \notin DK$$

f. Keputusan Uji: H_0 tidak ditolak (diterima)

g. Kesimpulan:

Benar bahwa pd ujian tsb rerata aljabar sebesar 6 dan rerata geometrinya sebesar 6.5.

Contoh :

Diketahui suatu kelompok ,yang banyak anggotanya n, dengan dua variable X_1 dan X_2 dengan data berikut :

n=100 $\sigma_1 = 5$

$\overline{X_1} = 14.2$ $\sigma_2 = 5$

$\overline{X_2} = 20.4$ $\rho_{12} = 0$

Dengan menggunakan tingkat signifikansi 5% ,ujilah hipotesis nol berikut:

$$H_0: \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \end{bmatrix}$$

a. $H_0: \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \end{bmatrix}$

$H_1 : \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \end{bmatrix}$

b. $\alpha = 0.05$

c. statistik uji :

$\chi^2 = n(\bar{X} - \mu_0)'(\Sigma)^{-1}(\bar{X} - \mu_0)$

d. komputasi :

$$\bar{X} - \mu_0 = \begin{bmatrix} \overline{X_1} \\ \overline{X_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.2 \\ 20.4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1{}^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2{}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$$

$$|\Sigma| = (25)(25) - (0)(0) = 625$$

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{625} \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\chi^2_{obs} = 100\begin{bmatrix}-0.8 & 0.4\end{bmatrix}\frac{1}{625}\begin{bmatrix}25 & 0\\ 0 & 25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.8\\ 0.4\end{bmatrix}$$

$$= \frac{100}{625}\begin{bmatrix}-0.8 & 0.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-20\\ 10\end{bmatrix}$$

$$= \frac{100}{625}[16 + 4]$$

$$= \frac{100}{625}[20] = 3.2$$

e. daerah kritis :

$\chi^2_{0.05;2} = 5.591$

$DK = \{\chi^2 \mid \chi^2 > 5.591$

χ^2_{obs} bukan anggota DK

f. keputusan uji : H_0 diterima (tidak ditolak)

g. kesimpulan : $\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}15\\ 20\end{bmatrix}$

Contoh

Diketahui suatu kelompok, yang banyak anggotanya n, dengan dua variable X_1 dan X_2, dengan data sebagai berikut:

$n = 100$

$\sigma_1 = 5$ $\quad\quad$ $\sigma_2 = 5$

$\overline{X_1} = 14.2$ $\quad\quad$ $\overline{X_2} = 20.4$

$\rho_{12} = 0.6$

Dengan menggunakan tingkat signifikasi 5%, ujilah hipotesis nol berikut:

$$H_0 \quad : \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \end{bmatrix}$$

JAWAB

a. Hipotesis

$$H_0 : \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$H_1 : \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \end{bmatrix}$$

b. Tingkat Signifikansi

$$\alpha = 0.05$$

c. Statistik Uji :

$$\chi^2 = (n)(\overline{X} - \mu_0)'(\sum)^{-1}(\overline{X} - \mu_0) \sim \chi^2_{(p)}$$

d. Komputasi :

$$\bar{X} - \mu_0 = \begin{bmatrix} \overline{X_1} \\ \overline{X_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.2 \\ 20.4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1{}^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2{}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 15 \\ 15 & 25 \end{bmatrix}$$

$$|\Sigma| = (25)(25) - (15)(15) = 400$$

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{400}\begin{bmatrix} 25 & 15 \\ 15 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\chi^2_{obs} = 100\,[-0.8 \quad 0.4]\,\frac{1}{400}\begin{bmatrix}25 & 15\\ 15 & 25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.8\\ 0.4\end{bmatrix}$$

$$= \frac{100}{400}\,[-0.8 \quad 0.4]\begin{bmatrix}-26\\ 22\end{bmatrix}$$

$$= \frac{100}{400}\,[20.8 + 8.8]$$

$$= \frac{100}{400}\,[29.6]$$

$$= 7.4$$

e. Daerah Kritis

$$\chi^2_{0.05;2} = 5.991$$

$$DK = \left\{ \chi^2 \mid \chi^2 > 5.591 \right\}$$

$$\chi^2_{obs} \ \mathrm{E} \ DK$$

f. Keputusan Uji: H_0 ditolak

g. Kesimpulan:

$$\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \end{bmatrix}$$

DAFTAR PUSTAKA

- Budiyono.2013.*Metode Statistika Mutivariat.*Yogyakarta : UNY Press