INTERVAL KONFIDENSI

By:
1.DEDY YUDA PRASETYO K1313011
2.PRAPHASTHA JAYANTARA K1313055

A.Interval Konfidensi pada Selisih Rata-rata

1. Bila kita mempunyai $\bar{x}_1$ dan $\bar{x}_2$ masing-masing adalah mean sample acak bebas berukuran n_1 dan n_2 yang diambil dari populasi dengan ragam σ_1^2 dan σ_2^2 diketahui, maka selang kepercayaan 100(1-α)% bagi μ_1-μ_2 adalah

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Dengan $z_{\alpha/2}$ adalah nilai z yang luas daerah di sebelah kanan dibawah kurva normal standar adalah $\alpha/2$

CATATAN : Jika σ_1^2 dan σ_2^2 tidak diketahui, tetapi n_1 dan n_2 lebih besar dari 30, maka σ_1^2 dan σ_2^2 dapat diganti dengan s_1^2 dan s_2^2.

Contoh Soal:

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}<\mu_1-\mu_2<(\bar{x}_1-\bar{x}_2)+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Diketahui nilai ujian kimia yang diberikan pada 50 siswa putri dan 75 siswa putra mempunyai rata-rata secara berurutan adalah 76 dan 86. Cari selang kepercayaan 96% untuk selisih $\mu_1 - \mu_2$. ! Anggap standar deviasi populasi untuk masing-masing putra dan putri adalah 8 dan 6.

Jawab:

Misal: $\bar{x}_1 = 86$ adl rata-rata nilai siswa putra, $n_1 = 75$ dan $\sigma_1 = 8$.

$\bar{x}_2 = 76$ adl rata-rata nilai siswa putri, $n_2 = 50$ dan $\sigma_2 = 6$.

$\alpha = 0.04 \longrightarrow z_{0.02} = 2.05$

Selang kepercayaan 96% bagi selisih rata-rata nilai siswa putra dengan siswa putri adalah

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}<\mu_1-\mu_2<(\bar{x}_1-\bar{x}_2)+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$(86-76)-(2{,}05)\sqrt{\left(\frac{8^2}{75}\right)+\left(\frac{6^2}{50}\right)}<\mu_1-\mu_2<(86-76)+(2{,}05)\sqrt{\left(\frac{8^2}{75}\right)+\left(\frac{6^2}{50}\right)}$$

$$3{,}43<\mu_1-\mu_2<8{,}57$$

2. Adapun penduga selang kepercayaan 100(1-α)% bagi μ_1-μ_2 untuk sampel kecil; bila $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ tapi nilainya tidak diketahui adalah

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-t_{\alpha/2}s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}<\mu_1-\mu_2<(\bar{x}_1-\bar{x}_2)+t_{\alpha/2}s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

dengan derajat bebas untuk distribusi t = v =$n_1 + n_2 - 2$ dan

$$S_p=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

Contoh Soal:

Sebanyak 12 sampel bulanan diambil dari stasiun muara, data indeks keragaman spesiesnya menghasilkan nilai rata-rata 3.11 dan standar deviasi 0.771, sedangkan dari stasiun hulu diambil 10 sampel bulanan dengan rata-rata indeks 2.04 dan standar deviasi 0.448. Buat selang kepercayaan 90% untuk selisih rata-rata populasi dari kedua stasiun, anggap kedua populasi berdistribusi hampir normal dengan varians sama!

Jawab:

Misal : $\bar{x}_1 = 3.11$ adl rata-rata indeks stasiun muara, $n_1 = 12$, $S_1 = 0.771$

$\bar{x}_2 = 2.04$ adl rata-rata indeks stasiun hulu, $n_2 = 10$, $S_2 = 0.448$.

Diasumsikan varians sama, maka

$$S_p = \sqrt{\frac{(12-1)(0.771)^2 + (10-1)(0.448)^2}{12+10-2}} = 0.646$$

$\alpha = 0.1 \rightarrow t^{0.05}{}_{db=12+10-2} = t^{0.05}{}_{db=20} = 1.725$

Jadi, selang kepercayaan 90% untuk selisih rata-rata indeks keragaman spesies di muara dengan di hulu adalah

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \le \mu_1 - \mu_2 \le (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$(3{,}11 - 2{,}04) - (1{,}725)\,(0{,}646)\,\sqrt{\left(\frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{10}\right)} \le \mu_1 - \mu_2 \le (3{,}11 - 2{,}04) + (1{,}725)\,(0{,}646)\,\sqrt{\left(\frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{10}\right)}$$

$$0{,}593 \le \mu_1 - \mu_2 \le 1{,}547$$

3. Selang kepercayaan 100(1-α)% bagi μ_1-μ_2 untuk sampel kecil; bila $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ tapi nilainya tidak diketahui

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

Dengan derajat bebas untuk distribusi t adalah

$$v = \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{[(s_1^2/n_1)^2/(n_1-1)] + [(s_2^2/n_2)^2/(n_2-1)]}$$

Contoh soal :

Lima belas sampel dikumpulkan dari stasion 1 dan 12 sampel diukur dari stasion 2. ke 15 sampel dari stasion 1 mempunyai rata-rata kadar ortofosfor 3.84 mg/l dan standar deviasi 3.07 mg/l, sedangkan 12 sampel dari stasion 2 mempunyai rata-rata kadar 1.49 mg/l dengan standar deviasi 0.80 mg/l. Cari selang kepercayaan 95% untuk selisih rata-rata kadar ortofosfor sesungguhnya pada kedua stasion tersebut, anggap bahwa pengamatan berasal dari populasi normal dengan varians yang berbeda!

Jawab:

Misal : $\bar{x}_1 = 3.84$ adl rata-rata kadar ortofosfor stasion 1, $n_1 = 15$, $S_1 = 3.07$

$\bar{x}_2 = 1.49$ adl rata-rata kadar ortofosfor stasion 2, $n_2 = 12$, $S_2 = 0.80$

Diasumsikan varians berbeda, maka

$$v = \frac{\left(\frac{3.07^2}{15} + \frac{0.80^2}{12}\right)^2}{\frac{\left(\frac{3.07^2}{15}\right)^2}{(15-1)} + \frac{\left(\frac{0.80^2}{12}\right)^2}{(12-1)}} = 16.3 \approx 16$$

$$\alpha = 0.05 \rightarrow t^{0.025}{}_{\text{db}=\text{v}} = t^{0.025}{}_{\text{db}=16} = 2.120$$

Jadi, selang kepercayaan 95% untuk selisih rata-rata kadar ortofosfor di stasion 1 dengan stasion 2 adalah

$$(3.84-1.49)-(2.120)\sqrt{\frac{3.07^2}{15}+\frac{0.80^2}{12}} < \mu_1 - \mu_2 < (3.84-1.49)+(2.120)\sqrt{\frac{3.07^2}{15}+\frac{0.80^2}{12}}$$

$$0.60 < \mu_1 - \mu_2 < 4.10$$

B. Interval Konfidensi pada Variansi

Estimasi selang untuk σ^2 diturunkan dengan menggunakan statistik χ^2 (baca: chi-square) dengan derajat bebas db = n-1

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

Bila s^2 adalah adalah penduga titik bagi varians sampel acak berukuran n yang diambil dari suatu populasi normal dengan varians σ^2, maka selang kepercayaan $100(1-\alpha)\%$ bagi σ^2 adalah

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(n-1,\alpha/2)}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(n-1,1-\alpha/2)}}$$

Dengan $\chi^2_{(n-1,\alpha/2)}$ adalah nilai χ^2 dengan derajat bebas v = n–1 yang luas daerah di sebelah kanannya sebesar $\alpha/2$

Contoh Soal:

Suatu Proses pengolahan seharusnya dilakukan pada suhu 68°C. selama 10 jam pengolahan, ternyata suhu yang terbaca pada thermometer mesin tersebut adalah sebagai berikut:

Jam Ke-	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Suhu	67.4	67.8	68.2	69.3	69.5	67.0	68.1	68.6	67.9	67.2

Dengan interval kepercayaan 95%, Carilah estimasi variansi suhu pada mesin tersebut!

Jawab:

n = 10 → n-1 = 9 ; $1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,97$

$\chi^2_{(9;0.975)} = 2.70$; $\chi^2_{(9;0.025)} = 19.02$

Variansi sampel s^2 memberikan estimasi titik untuk s^2

$$S^2 = \frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{n-1} = \frac{6.3}{9} = 0.70$$

Estimasi populasi variamsi dengan tingkay kepercayaan 95% adalah:

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(n-1,\alpha/2)}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(n-1,1-\alpha/2)}}$$

$$\frac{(10-1)0.70}{19.02} \le \sigma^2 \le \frac{(10-1)0.70}{2.70}$$

$$0.33 \le \sigma^2 \le 2.33$$

C. Interval Konfidensi pada Rasio Variansi

Bila σ_1 dan σ_2 varians dua populasi normal, maka estimasi selang untuk rasio σ_1/σ_2 diperoleh dengan menggunakan statistik *f* yakni,

$$F = \frac{\sigma_2^2 . S_1^2}{\sigma_1^2 . S_2^2} \sim F_{v1,v2}$$

Dengan derajat bebas $v_1 = n_1 - 1$ dan $v_2 = n_2 - 1$

Bila S_1^2 dan S_2^2 varians dari sampel acak masing-masing berukuran n_1 dan n_2 dari populasi normal, maka selang kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk rasio σ_1/σ_2 adalah

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \frac{1}{f_{\alpha/2(v_1,v_2)}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2} f_{\alpha/2(v_2,v_1)}$$

Varians dikatakan sama jika dan hanya jika selang mencakup nilai 1

Contoh Soal:

Suatu tes penempatan untuk matematika diberikan pada 25 siswa laki-laki dan 16 siswa perempuan. Siswa laki-laki mencapai nilai rata-rata 82 dengan simpangan baku 8, sedangkan siswa perempuan mencapai nilai rata-rata 78 dengan simpangan baku 7. Buat selang kepercayaan 98% bagi dan , bila masing-masing adalah variansi populasi semua nilai siswa laki-laki dan perempuan yang mungkin mengambil tes tersebut. Asumsikan bahwa populasinya menyebar normal.

Jawab:

Dalam hal ini kita mempunyai $n_1 = 25$, $n_1 = 16$, $s_1 = 8$, dan $s_1 = 7$.

Untuk Selang Kepercayaan, $1 - \alpha = 0.98 \rightarrow \alpha = 0.02 \rightarrow \alpha/2 = 0.02$. Dengan menggunakan tabel kita memperoleh $f_{0.01}(24,15) = 3.29$ dan $f_{0.01}(15,24) = 2.89$.

Maka,

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \frac{1}{f_{\alpha/2(v_1,v_2)}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2} f_{\alpha/2(v_2,v_1)}$$

$$\frac{64}{49} \cdot \frac{1}{3.29} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{64}{49} (2.89)$$

$$0.397 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 3.775$$