Matriks Gramian dan Matriks Definit Positif

By:

Aulia Chairunnisa

Deni Indriyani

Universitas Sebelas Maret

2014

- Matriks A disebut matriks Gramian apabila dapat ditemukan matriks B sedemikian hingga berlaku $A=B^tB$ atau $A=BB^t$
- Matriks SSCP yang dibicarakan didepan adalah salah satu contoh matriks Gramian.

Berikut ini adalah beberapa sifat matriks Gramian:

I. Misalnya A adalah simetris dan bentuk kuadrat x^tAx disebut semi definit positif jika $x^tAx \geq 0$ untuk setiap x. Sedangkan, jika $x^tAx > 0$ untuk setiap x tidak sama dengan nol disebut matriks definit positif.

   Matriks Gramian juga disebut matriks semi definit positif, sedangkan Matriks Gramian yang non-singular (determinannya tidak sama dengan nol) disebut juga matriks definit positif.

II. Matriks simetris A adalah semi definit positif jika hanya jika semua nilai eigen A adalah non-negatif. Sedangkan, Matriks simetris A adalah definit positif jika hanya jika semua nilai eigen A adalah positif.

III. Setiap matriks simetris A yang seluruh determinan minor utamanya non-negatif adalah semi definit positif. Sedangkan untuk setiap matriks simetris G yang seluruh determinan minor utamanya positif adalah definit positif.

contoh

- Misalnya terdapat dua variabel X_1 dan X_2 dengan nilai-nilai yang terdapat pada tabel berikut :

No Subjek	X_1	X_2
1	1	6
2	3	3
3	2	4
4	5	4
5	2	5
Rerata	$\overline{X_1} = 2.6$	$\overline{X_2} = 4.4$

- diperoleh matriks jumlah-kuadrat-dan-jumlah-produk (*Sum of Square and Cross Product*/ SSCP) $A = \begin{bmatrix} 9{,}2 & -3{,}2 \\ -3{,}2 & 5{,}2 \end{bmatrix}$

- Matriks simetris $A = \begin{bmatrix} 9{,}2 & -3{,}2 \\ -3{,}2 & 5{,}2 \end{bmatrix}$ adalah matriks Gramian yang non-singular (det(A)=37,6) karena itu maka matriks Q sedemian hingga $Q = [x \quad y] \begin{bmatrix} 9{,}2 & -3{,}2 \\ -3{,}2 & 5{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ adalah definit positif sebab setiap $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ tidak sama dengan nol, akan menghasilkan Q yang posiif.

soal

- Dibentuk matriks Q sedemikian hingga

$$Q = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Matiks Q ini disebut matriks dalam bentuk kuadrat (quadratic form). Jelaskan apakah Q definit positif atau tidak, jika :

a. $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

d. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

e. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

Jawaban :

(Dengan Mencari Nilai Eigen dari A)

a. Matriks simetrik $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

mempunyai nilai eigen

$$\lambda = \frac{11+\sqrt{37}}{2} = 8{,}54 \text{ dan } \lambda = \frac{11-\sqrt{37}}{2} = 2{,}46$$

karena keduanya positif maka matriks A adalah definit positif. Dan untuk semua x≠0

$$x^t Ax = 5x^2 + 6xy + 5y^2 > 0$$

b. Matriks simetrik $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ mempunyai nilai eigen

$$\lambda = \frac{1+\sqrt{157}}{2} = 6{,}76 \text{ dan } \lambda = \frac{1-\sqrt{157}}{2} = -5{,}76$$

Karena diperoleh nilai eigen yang bernilai positif dan negatif maka matriks A bukan definit.

c. Matriks simetrik $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ mempunyai nilai eigen

$$\lambda = 0 \text{ dan } \lambda = 10$$

Karena nilai eigen dari matriks A adalah non-negatif, maka matriks A adalah semi definit positif. Dan untuk semua x,

$$x^t Ax = 5x^2 + 13xy + 6y^2 \geq 0$$

d. Matriks simetrik $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ mempunyai nilai eigen

$$\lambda = 0,\ \lambda = 0,\ \text{dan}\ \lambda = 1$$

Karena nilai eigen dari matriks A adalah non-negatif, maka matriks A adalah semi definit positif. Dan untuk semua x,

$$x^t A x = 5x^2 + 13xy + 6y^2 \geq 0$$

e. Matriks simetrik $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ mempunyai nilai eigen

$$\lambda = 1,\ \lambda = 4,\ \text{dan}\ \lambda = 3$$

Karena keduanya positif maka matriks A adalah definit positif, dan untuk semua

$$x \neq 0,\ \ x^t Ax = 5x^2 + 6xy + 5y^2 > 0$$

Dengan Mencari Determinan Minor Utama / Determinan Submatrik Utama dari A

a. Matriks simetrik

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\det(A_1) = |5| = 5, \qquad det(A_2) = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 21$$

Determinan minor utama semuanya positif. Jadi, matriks A adalah definit positif karena menjamin semua nilai eigen A adalah positif dan $x^t Ax > 0$ untuk semua x ≠ 0

b. Matriks simetrik

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\det(A_1) = |-5| = -5, \qquad det(A_2) = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -39$$

mempunyai determinan negatif. Jadi, matriks A bukan definit.

c. Matriks simetrik

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A_1) = |8| = 8, \qquad det(A_2) = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

mempunyai determinan non-negatif. Jadi, matriks A adalah semi definit positif sehingga $x^t Ax \geq 0$ untuk semua x

d. Matriks simetrik

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A_1) = |1| = 1, \qquad det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

mempunyai determinan non-negatif. Jadi, matriks A adalah semi definit positif sehingga $x^t Ax \geq 0$ untuk semua x

e. Matriks simetrik

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A_1) = |3| = 3, \quad det(A_2) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad \det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 12$$

Determinan minor utama semuanya positif. Jadi, matriks A adalah definit positif karena menjamin semua nilai eigen A adalah positif dan $x^t Ax \geq 0$ untuk semua x

SEKIAN