

Nilai Eigen dan Vektor Eigen, Rank Suatu Matriks

Judul

Pengalaman
Belajar

Materi

Selesai

Nilai Eigen dan Vektor Eigen, Rank Suatu Matriks



Kembali

Judul

Pengalaman
Belajar

Materi

Selesai

1.4. Nilai Eigen Dan Vektor Eigen

1.5. Rank Suatu Matriks

Judul

Pengalaman Belajar

Materi

Selesai

1.4. Nilai Eigen Dan Vektor
Eigen

1.5. Rank Suatu Matriks



Kembali

Judul

Pengalaman
Belajar

Materi

Selesai

Judul

Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Pengalaman
Belajar

Rank Matrik dan Nullity

Materi

Selesai

Pendahuluan

jika suatu matriks A berukuran $n \times n$ dan x suatu vektor pada $\mathbb{R}^n$, seringkali kita menemukan suatu vektor tak nol x tertentu sedemikian hingga x dan Ax merupakan pergandaan satu sama lain dan berlaku $Ax = \lambda x$ dengan A matrik berukuran $n \times n$ dan λ suatu skalar. Kejadian inilah yang dinamakan nilai eigen dan vektor eigen (eigenvalue dan eigenvektor) dan merupakan kejadian yang sering dijumpai dalam matriks.

Judul

Pengalaman
Belajar

Materi

Selesai

Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Diberikan matriks A $n \times n$, maka vektor tak nol $x \in \mathbb{R}^n$ disebut vektor karakteristik (*eigen vector*) dari matriks A .

Jika berlaku $Ax = \lambda x$ untuk suatu skalar λ , maka λ disebut nilai karakteristik (*eigen value*) dari matriks A .

$$Ax = \lambda x$$

Vektor karakteristik merupakan solusi non trivial (solusi yang tidak semuanya nol) dari $(A - \lambda I)x = 0$

Agar diperoleh solusi non trivial maka

$$|A - \lambda I| = 0$$

dimana $|A - \lambda I| = 0$ disebut polinomial karakteristik

Judul

Pengalaman
Belajar

Materi

Selesai

Contoh:

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Judul

Pengalaman
Belajar

Materi

Selesai

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) = 0$$

Jadi polinomial karakteristik: $(1-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) = 0$

Akar-akar polinomial karakteristik: $\lambda_1=0$,
 $\lambda_2=\lambda_3=1$

Jadi nilai eigen matriks A adalah 0 dan 1.

Vektor eigen untuk $\lambda=0$

Judul

Pengalaman
Belajar

Materi

Selesai

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda I)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jadi $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=t$, $t \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$

Jadi $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$ merupakan vektor eigen

Yang berkorespondensi dengan $\lambda=0$

Judul

Pengalaman
Belajar

Materi

Selesai

Vektor eigen untuk $\lambda=1$

$$A-\lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda I)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jadi $x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=0$, $a,b \neq 0$, $a,b \in \mathbb{R}$

Jadi $x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ merupakan vektor eigen

yang berkorespondensi dengan $\lambda=1$

Judul

Pengalaman
Belajar

Materi

Selesai

Judul

Teorema :

Jika A adalah suatu matriks segitiga (segitiga atas atau segitiga bawah atau matriks diagonal) berukuran $m \times m$, maka eigenvalue dari A adalah elemen-elemen diagonal utama dari A .

Contoh

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 5 & -8 & -\frac{4}{8} \end{bmatrix}$$

Pengalaman Belajar

Materi

Selesai

Rank Matriks dan Nullity

Rank merupakan dimensi ruang kolom (banyaknya vektor yang bebas linear, yaitu kolom yang memuat 1 utama melalui OBE).

Nullity merupakan dimensi ruang nol.

Contoh 1:

Tentukan rank matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Judul

Pengalaman
Belajar

Materi

Selesai