Kriteria Estimator

→Estimasi Tak Bias

→UMVUE

Estimator Takbias

Definisi 9.3.1

Estimator T dikatakan sebagai estimator takbias dari $\tau(\theta)$ jika $E(\mathrm{T}) = \tau(\theta)$ untuk setiap $\theta \in \Omega$.

Selainnya, dapat dikatakan bahwa T estimator bias dari $\tau(\theta)$

contoh 1

Jika $X_1, X_2, \ldots, X_n$ menyatakan variabel random berukuran n dari $f(x)$ dengan $E[X] = \mu$ dan $V(X) = \sigma^2$ maka $E[s^2] = \sigma^2$

contoh 2

Jika variabel random berdistribusi Eksponensial, $X_i \sim EXP(\theta)$ maka buktikan bahwa $\hat{\theta} = \bar{x}$

Pertanyaan….?

Estimator yang seperti apa yang merupakan estimator terbaik?

→Ide :

Memilih estimator yang “berkecenderungan” atau mendekati nilai sesungguhnya (kosentrasi) harga parameter

Misal

T_1 lebih konsentratif dibanding T_2 terhadap $\tau(\theta)$

$$P[\tau(\theta)-\varepsilon < T_1 < \tau(\theta)+\varepsilon], \quad \forall \varepsilon > 0$$

Sebuah estimator dikatakan paling konsentratif jika estimator tersebut lebih konsentratif dibanding yang lainnya

UMVUE

Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimators

Jika $X_1, X_2, \ldots, X_n$ merupakan variabel random berukuran n dari $f(x;\theta)$.

Estimator T^* dari $\tau(\theta)$ dikatakan

Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimator (UMVUE)

dari $\tau(\theta)$ jika :

1. T^* takbias dari $\tau(\theta)$
2. estimator takbias T^* dari $\tau(\theta)$, $\mathrm{V}(T^*) \le \mathrm{V}(T)$, $\forall \theta \in \Omega$

Contoh 2

Sampel random dari distribusi Eksponensial, $X_i \sim \text{EXP}(\theta)$

Apakah $\hat{\theta}$ UMVUE?

Dalam kasus tertentu, UMVUE untuk θ dapat ditentukan dengan menggunakan CRLB (Cramer Rao Lower Bound)

CRLB
Cramer Rao - Lower Bound

T adalah estimator tak bias untuk $\tau(\theta)$, maka CRLB berdasarkan sampel random adalah

$$V(T) \geq \frac{[\tau'(\theta)]^2}{nE\left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(X;\theta)\right]^2}$$

contoh 2

Jika sampel random dari distribusi Eksponensial, $X_i \sim \mathrm{EXP}(\theta)$

maka tentukan CRLB untuk θ ?

Definisi : Estimator Konsisten

$\hat{\theta}$ dikatakan estimator konsisten bagi parameter θ

jika dipenuhi

$$P\left(\left|\hat{\theta}-\theta\right| \leq \delta\right) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty$$

untuk menunjukkan bahwa suatu estimator konsisten

berdasarkan definisi di atas dapat digunakan

Pertidaksamaan Chebysev's

Ketidaksamaan Chebychev

T estimator takbias dari $\tau(\theta)$,

$$P[\tau(\theta)-\varepsilon < T < \tau(\theta)+\varepsilon] \geq 1-\frac{\mathrm{var}(T)}{\varepsilon^2}, \quad \forall \varepsilon > 0$$

Ingat Stamat 1!!!
Bain, pg 76

$$P\left(\left|X-\mu\right| < k\sigma\right) \geq 1-\frac{1}{k^2}$$

contoh

Misalkan merupakan sampel random variabel random X berdistribusi $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ dengan σ^2 diketahui.

Buktikan $\overline{X}$ merupakan estimator konsisten untuk μ

Efisien

efisiensi relatif dari estimator tak bias T dari $\tau(\theta)$ terhadap estimator tak bias lain T^* dari $\tau(\theta)$ diberikan :

$$\mathrm{re}\left(T,T^*\right)=\frac{V\left(T^*\right)}{V(T)}$$

Estimator tak bias T^* dari $\tau(\theta)$ dikatakan efisien jika $\mathrm{re}\left(T,T^*\right)\leq 1$ untuk setiap estimator tak bias T dari $\tau(\theta), \forall\,\theta\in\Omega$

Efisiensi estimator tak bias T dari $\tau(\theta)$ adalah :

$$\mathrm{e}(T)=\mathrm{re}\left(T,T^*\right)$$

jika T^* adalah estimator efisien untuk $\tau(\theta)$

Definisi

Jika T adalah estimator $\tau(\theta)$ maka bias diberikan :

$$b(T) = E[T] - \tau(\theta)$$

the Mean Squared Error (MSE/Rataan Kuadrat Sesatan) T diberikan :

$$MSE(T) = E[T - \tau(\theta)]^2$$

Teorema

Jika T adalah estimator $\tau(\theta)$ maka $MSE(T) = V(T) + [b(T)]^2$