Estimasi Interval

BAB 3

REVIEW..

Pelajari kembali Statmat 1 → distribusi sampling

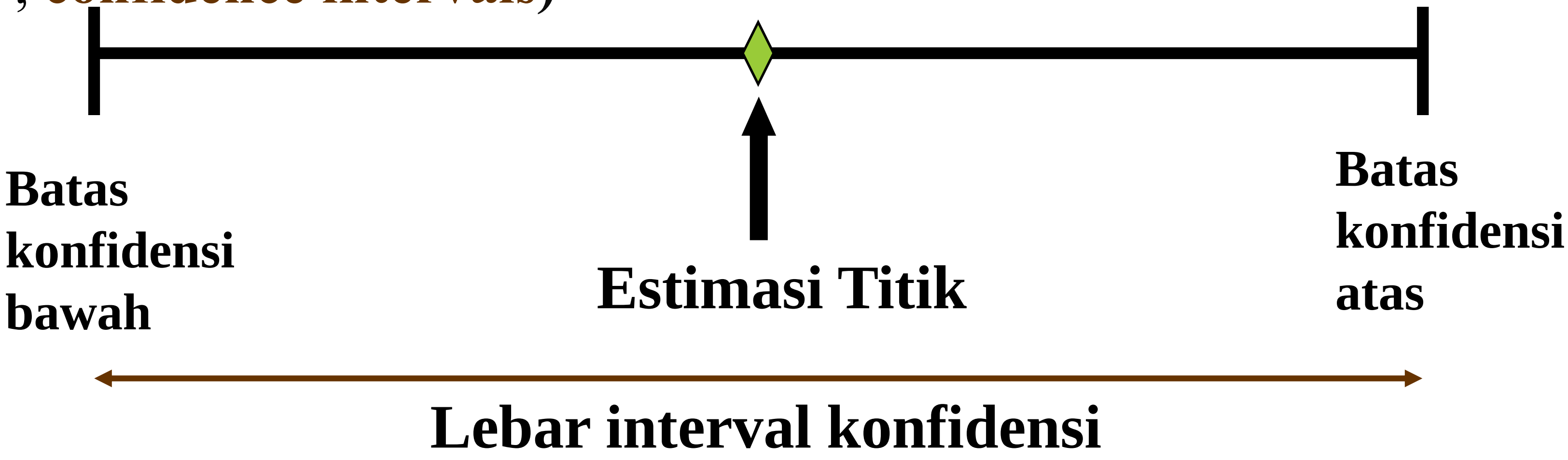
Distribusi sampling digunakan untuk penentuan estimasi parameter populasi

Estimasi titik → satu titik riil

Seberapa besar keakuratan nilai tunggal ini dalam estimasi parameter populasi ?

Estimasi Interval → estimasi interval menyediakan informasi yang lebih tentang parameter populasi karena estimasinya dalam bentuk interval

Estimasi interval ini biasa disebut dengan CI / IK(interval konfidensi , **confidence intervals**)



INTERVAL KONFIDENSI

Merupakan suatu metode untuk mengestimasi parameter yang tidak diketahui $\theta \in \Theta \subseteq \Re$ dalam bentuk interval

$$\Downarrow$$

$$2 \text{ statistik } T_{\mathrm{L}}(\mathbf{X}), T_{\mathrm{U}}(\mathbf{X}) \text{ berdasarkan data } \mathbf{X}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(T_{\mathrm{L}}(\mathbf{X}), T_{\mathrm{U}}(\mathbf{X})\right) \text{ estimator untuk } \theta$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ mempunyai pdf gabungan $f\left(X_1, X_2, \ldots, X_n; \theta\right), \theta \in \Omega$

Ω : interval, anggap L dan U adalah statistik,

$\mathrm{L} = \ell\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$

$\mathrm{U} = u\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$

Definisi 11.2.1 CI

Interval $\left(\ell\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right), u\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)\right)$ disebut dengan interval konfidensi $100\gamma\%$ untuk θ jika :

$$\mathrm{P}\left[\ell\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right) < \theta < u\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)\right] = \gamma, \quad 0 < \gamma < 1$$

Pada nilai yang diobservasi $\ell\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ dan $u\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ disebut dengan batas konfidensi atas dan batas konfidensi bawah

DEFINISI 11.2.2
BATAS KONFIDENSI SATU SISI

1. Jika $\mathrm{P}\left[\ell\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right) < \theta\right] = \gamma$ maka $\ell(x) = \ell\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ disebut dengan batas bawah Interval konfidensi $100\gamma\%$ untuk θ
2. Jika $\mathrm{P}\left[\theta < u\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)\right] = \gamma$ maka $u(x) = u\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ disebut dengan batas atas Interval konfidensi $100\gamma\%$ untuk θ

Contoh 11.2.1

1. $X_i \sim EXP(\theta)$

Akan diturunkan batas bawah Interval Konfidensi 100γ% untuk θ

2. $X_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$

DARI STATMAT 1

Teorema 8.3.3 Hal 269, $\frac{2n\bar{x}}{\theta} \sim \chi^2(2n)$

Teorema 8.4.1 Hal 274, $Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$

$$X_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{x} \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Downarrow$$

sulit ditentukan jika σ tidak diketahui

$$\Downarrow$$

PIVOTAL METHOD

$$\Downarrow$$

untuk mencari CI untuk θ

ketika parameter tdk diketahui muncul

REVIEW: STATMAT 1 , BAIN:124

1. Besaran η disebut dengan parameter lokasi (**location parameter**) untuk distribusi *X* jika CDF atau pdf -nya :

$$F(x;\eta) = F_0(x-\eta) \text{atau } f(x;\eta) = f_0(x-\eta)$$

2. Besaran positif θ disebut dengan parameter skala (**scale parameter**) untuk distribusi *X* jika CDF atau pdf -nya :

$$F(x;\theta) = F_0\left(\frac{x}{\theta}\right) \text{atau } f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} f_0\left(\frac{x}{\theta}\right)$$

3. Besaran η dan θ>0 disebut dengan parameter lokasi-skala (**location-scale parameter**) untuk distribusi *X* jika CDF-nya

$$F(x;\theta,\eta) = F_0\left(\frac{x-\eta}{\theta}\right) \text{atau } f(x;\theta,\eta) = \frac{1}{\theta} f_0\left(\frac{x-\eta}{\theta}\right)$$

CONTOH

1. $X_i \sim EXP(\theta)$
2. $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

DEFINISI 11.3.1 PIVOTAL QUANTITY METHOD

Jika $Q = q(X_1, X_2, ..., X_n; \theta)$ adalah variabel random yang merupakan fungsi $X_1, X_2, ..., X_n$ dan θ maka Q disebut dengan kuantitas/besaran pivot jika distribusinya tidak tergantung θ atau parameter tdk diketahui lainnya.

contoh

$$Q = \frac{2n\bar{x}}{\theta} \sim \chi^2(2n)$$

Q merupakan kuantitas pivot karena $Q \sim \chi^2(2n)$ tdk tgt θ

TEOREMA 11.3.1

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ sampel random dari $f(x;\theta), \theta \in \Omega$.

Diasumsikan MLE $\hat{\theta}$ ada

1. Jika θ parameter lokasi maka $Q = \hat{\theta} - \theta$ adalah kuantitas pivot

2. Jika θ parameter skala maka $Q = \dfrac{\hat{\theta}}{\theta}$ adalah kuantitas pivot

Contoh

1. $X_i \sim EXP(\theta)$

2. $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TEOREMA 11.3.2

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ sampel random dari distribusi dengan parameter

lokasi - skala $f(x;\theta_1,\theta_2) = \dfrac{1}{\theta_2} f_0\left(\dfrac{x-\theta_1}{\theta_2}\right)$

Jika MLE $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ ada maka $\dfrac{\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)}{\hat{\theta}_2}$ dan $\dfrac{\hat{\theta}_2}{\theta_2}$

adalah kuantitas pivot untuk θ_1 dan θ_2

Tentukan CI 100γ%;

1. $\dfrac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

2. $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

LATIHAN KELOMPOK (4 ORANG)

1. data berikut adalah waktu hidup suatu alat pendingin (dalam satuan jam). data merupakan sampel random dari distribusi Eksponensial dengan parameter θ adalah :

74 57 48 29 502 12 70 21 29 389 59 27 153 26 326

a. Tentukan interval konfidensi 90% untuk rerata waktu θ
b. Tentukan batas bawah IK 95% untuk rerata waktu θ

2. Bain, 384, no 1a,b

3. jika diketahui $\dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$

A. Tunjukkan bahwa variabel random Binomial mempunyai rerata np dan variansi [np(1-p)]

B. Turunkan IK 100γ% untuk p

4. $$\sum_{i=1}^{10} X_i = 1740$$

$$\frac{2n\bar{x}}{\theta} \sim \chi_{\alpha}^{2}(2n)$$

Tentukan IK 95% untuk θ

PR. LAKUKAN SECARA BERPASANGAN

BUKTIKAN ! (BUKA BUKU BAIN BAB 8)

1. $\dfrac{2n\bar{x}}{\theta} \sim \chi^2_\alpha(2n)$

2. $Z = \dfrac{\sqrt{n}\left(\bar{x}-\mu\right)}{\sigma} \sim N(0,1)$

3. $\dfrac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

4. $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$