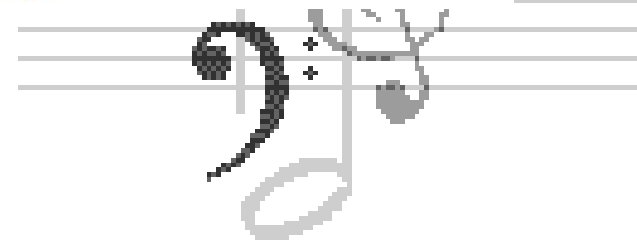
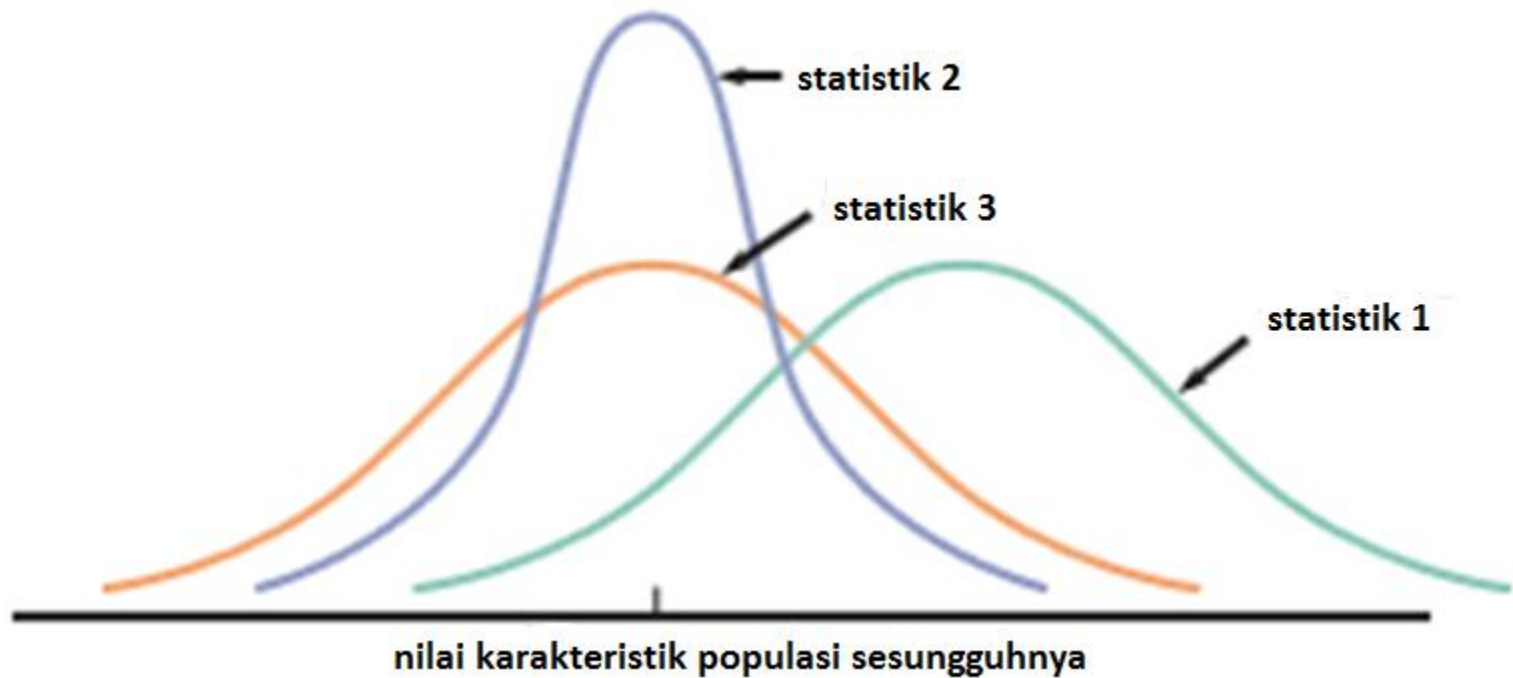


Review...

Tiga statistik diukur sebagai estimasi karakteristik dari populasi
Distribusi sampling dari tiga statistik seperti Gambar di bawah ini

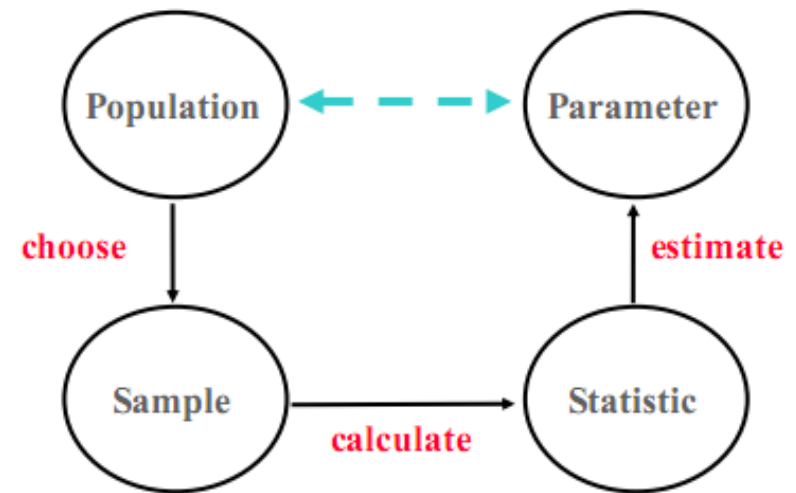
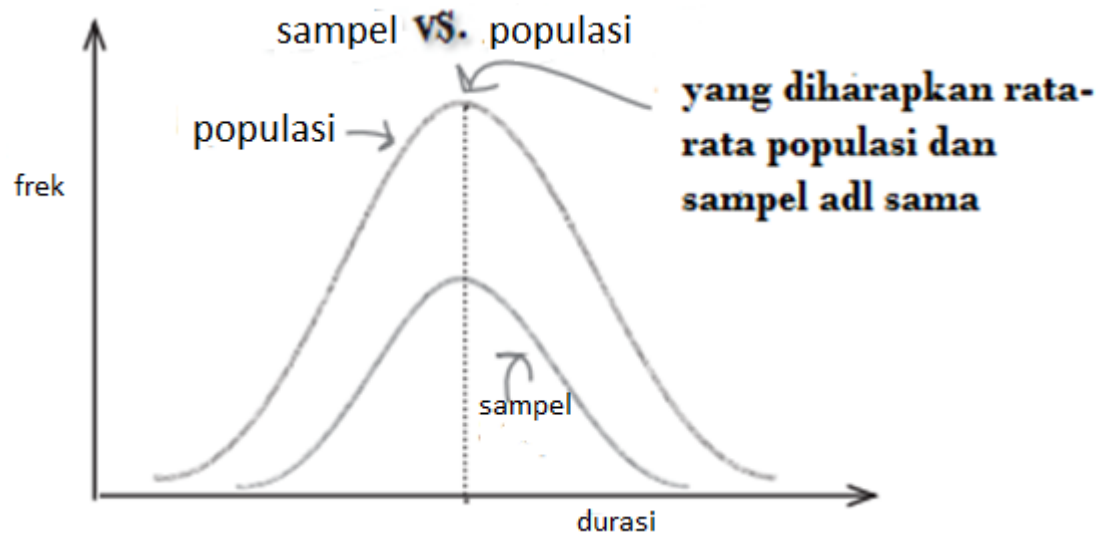




BAB 3

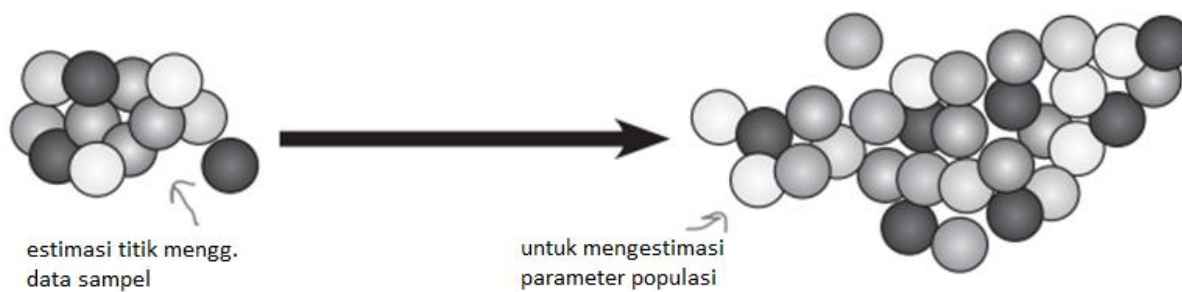
ESTIMASI

Ilustrasi



- **Mungkin rata-ratanya tidaklah sama tapi estimasi terbaik dapat ditentukan**
- **Rata-rata sampel → estimator titik untuk rata-rata populasi**
→ Artinya jika dihitung sampel data akan mengestimasi rata-rata populasi





- Estimator titik dapat menghasilkan nilai pendekatan suatu parameter populasi
- Estimasi titik dari parameter populasi θ adalah nilai tunggal, dinotasikan dengan : $\hat{\theta}$

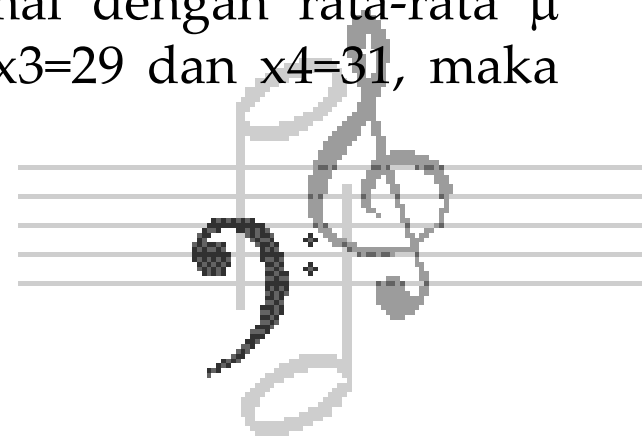
Misalkan suatu variabel random berdistribusi Normal dengan rata-rata tidak diketahui maka rata-rata sampelnya dapat dinotasikan:

$$\hat{\mu} = \bar{X}$$

Ilustrasi :

Misalkan variabel random X berdistribusi Normal dengan rata-rata μ tidak diketahui. Misalkan diambil $x_1=25$, $x_2=30$, $x_3=29$ dan $x_4=31$, maka dapat diestimasi rata-ratanya adalah

$$\bar{x} = \frac{25 + 30 + 29 + 31}{4} = 28.75$$



Beberapa estimasi titik

untuk μ , estimasinya adalah $\hat{\mu} = \bar{x}$, disebut dengan rata - rata sampel

untuk σ^2 , estimasinya adalah $\hat{\sigma}^2 = s^2$, disebut dengan variansi sampel

untuk p , estimasinya adalah $\hat{p} = \frac{x}{n}$, disebut dengan proporsi sampel

untuk $\mu_1 - \mu_2$, estimasinya adalah $\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$, merupakan selisih rata - rata dari dua sampel random independen

untuk $p_1 - p_2$, estimasinya adalah $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ merupakan selisih proporsi dari dua sampel random independen



Estimasi titik untuk variansi

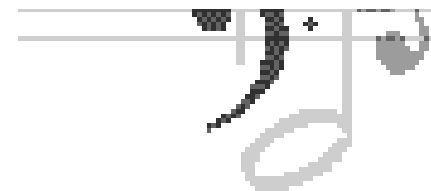
Population variance $\rightarrow \sigma^2 = \frac{\sum (x - \mu)^2}{n}$ $\leftarrow$ Population mean
 n $\leftarrow$ Size of the population

Point estimator
for the
population
variance $\rightarrow \hat{\sigma}^2 = s^2$

atau

$$s^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Estimator for the
population variance $\rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}$ $\leftarrow$ Take each item in the sample, subtract the sample mean, square the result, then add the lot together.
 $n - 1$ $\leftarrow$ Divide by the number in the sample minus 1.



Estimasi untuk Proporsi

- Jika X menggambarkan jumlah sukses dalam suatu populasi maka X mengikuti distribusi $\text{Bin}(n,p)$
- Misal akan diestimasi rata-rata populasi ???
- Estimasi rata-rata populasi $\rightarrow$ rata-rata sampel
- Proporsi sukses dalam populasi $\rightarrow$ proporsi sukses dalam sampel

Point estimator for the proportion of successes in the population $\rightarrow \hat{p} = p_s \leftarrow$ Proportion of successes in the sample

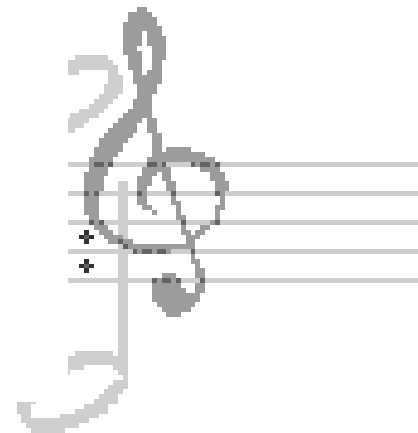
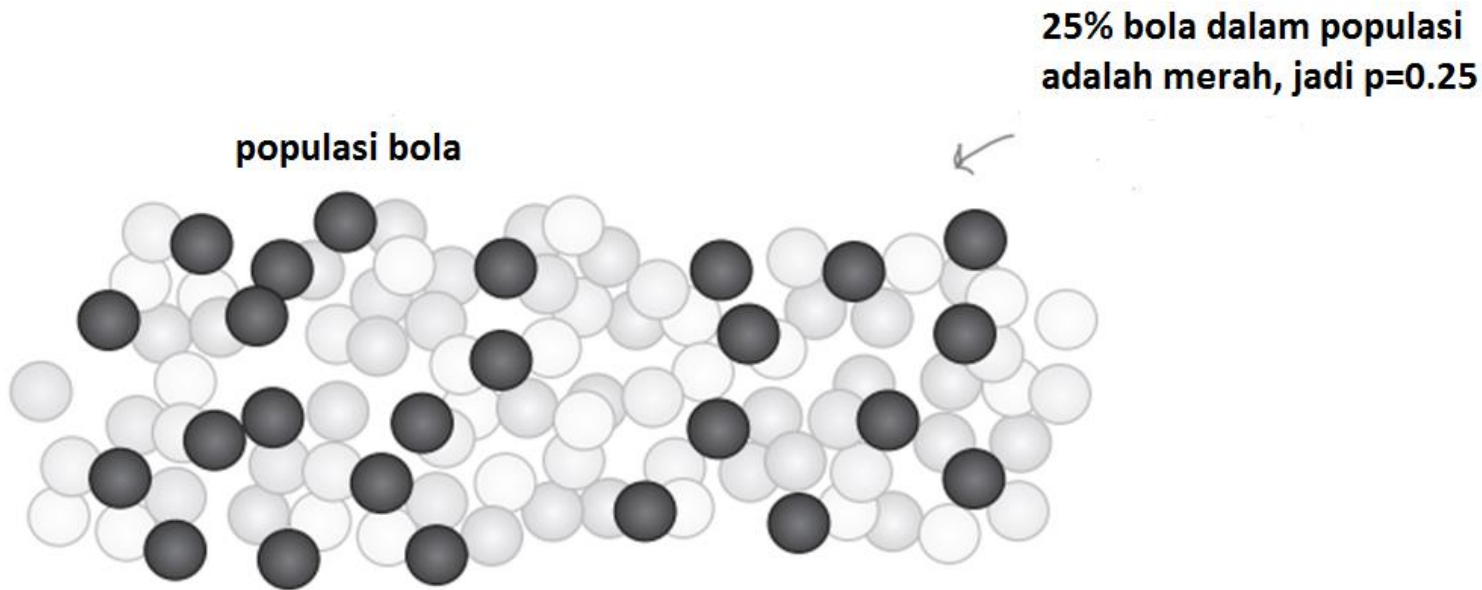
dengan

$$p_s = \frac{\text{number of successes}}{\text{number in sample}}$$

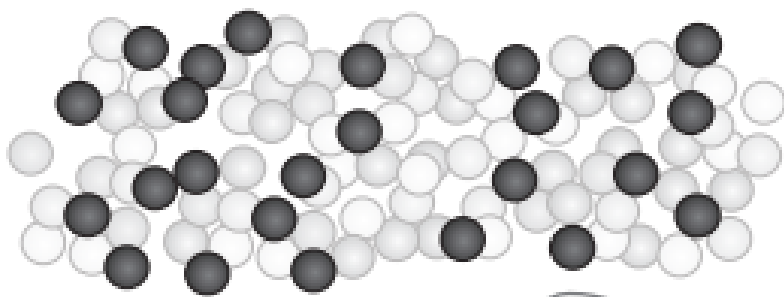


Distribusi sampling dari proporsi

- Bagaimana menentukan distribusi dari sampel proporsi?
- ilustrasi
- Jika X menggambarkan jumlah bola merah dalam sampel maka $X \sim \text{Bin}(n, p)$. Misal $n=100$, $p=0.25$
- Proporsi bola merah tergantung dari X yaitu jumlah bola merah dalam sampel



Sample



$X \sim B(n, p)$

We don't know the exact number of red gumballs in the sample, but we know its distribution.



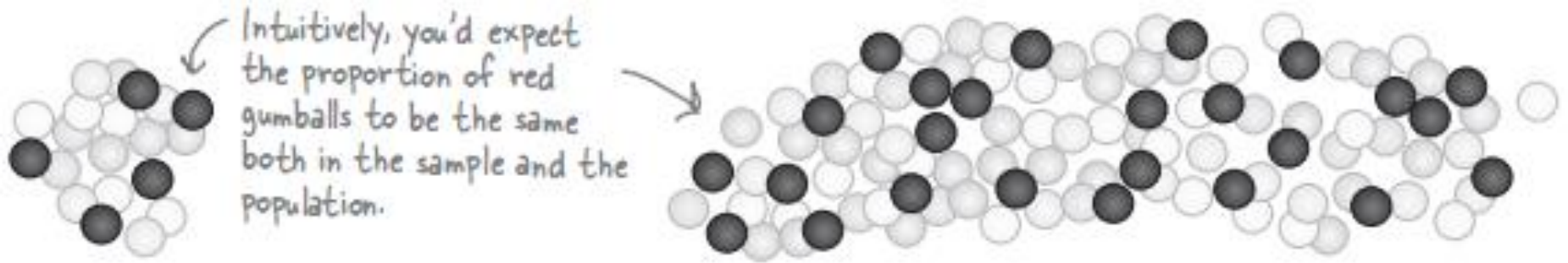
$$P_s = \frac{X}{n}$$

P_s represents the proportion of successes in the sample.

- Distribusi dari sampel proporsi dapat ditentukan dengan menggunakan **distribusi sampling proporsi** atau distribusi dari P_s



Ekspektasi & Variansi dari P_s ?



$$E(P_s) = E\left(\frac{X}{n}\right)$$

$$= \frac{E(X)}{n}$$

$$= \frac{np}{n} \leftarrow E(X) = np$$

$$= p$$

$$\text{Var}(P_s) = \text{Var}\left(\frac{X}{n}\right)$$

$$= \frac{\text{Var}(X)}{n^2}$$

$$= \frac{npq}{n^2} \leftarrow \text{Var}(X) = npq$$

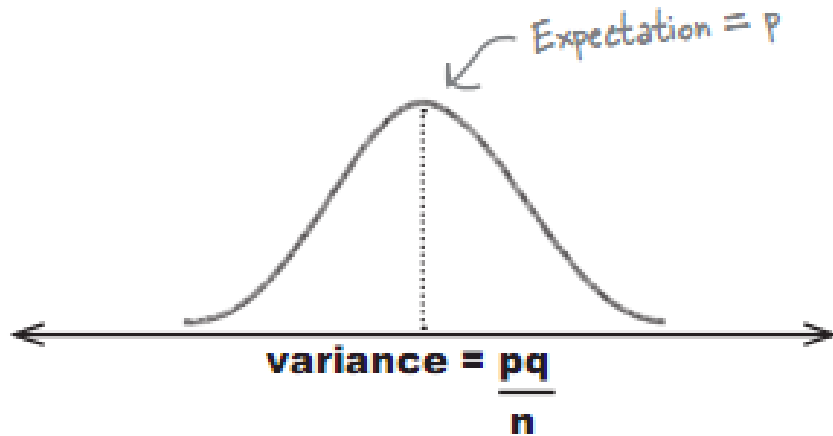
$$= \frac{pq}{n}$$

This comes from $\text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X)$.
In this case, $a = 1/n$.



So...

- Distribusi P_s tergantung dari n ...



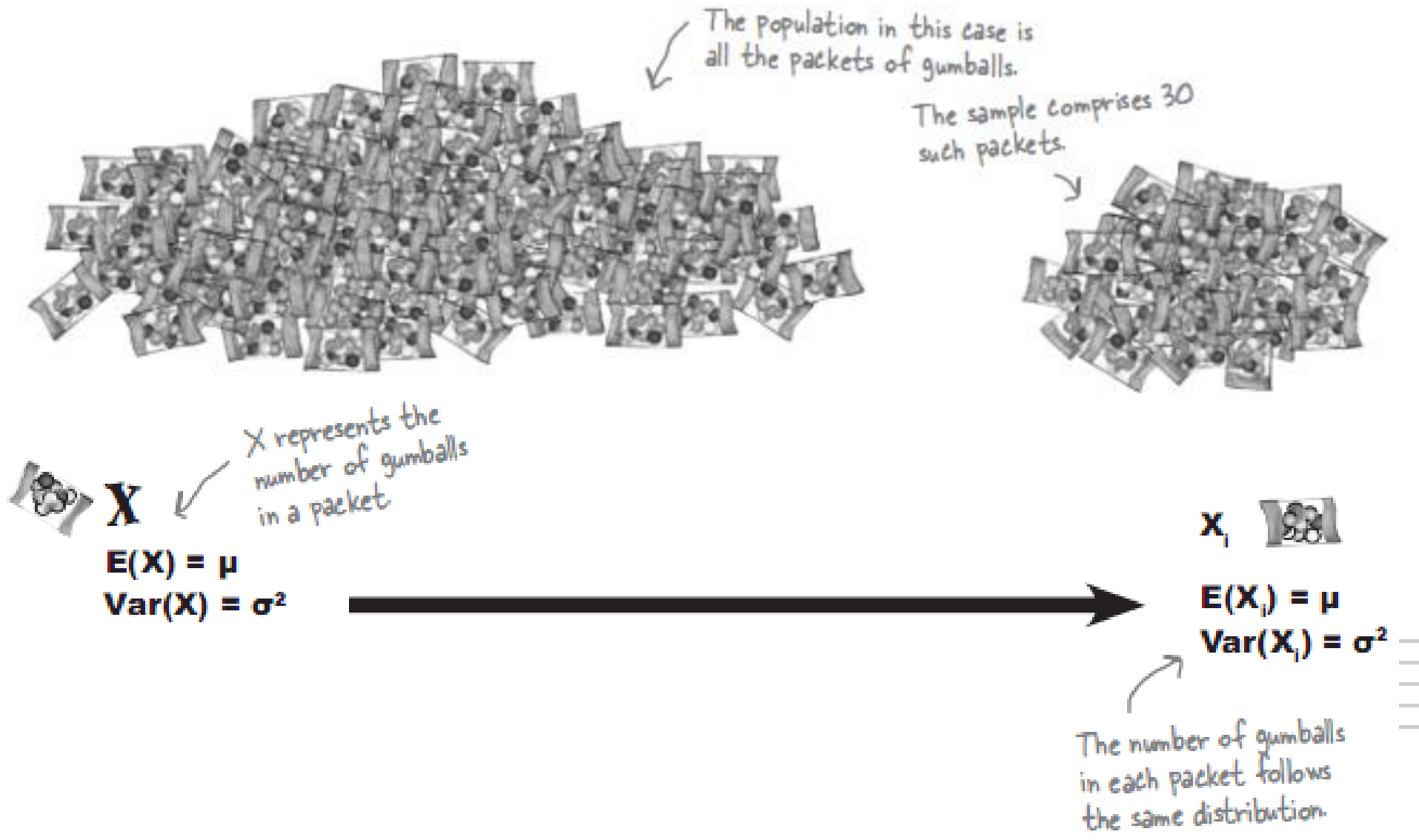
- Jika n bertambah besar (ukuran besar > 30) maka distribusi P_s akan mengikuti distribusi Normal, atau

$$P_s \sim N\left(p, \frac{pq}{n}\right)$$

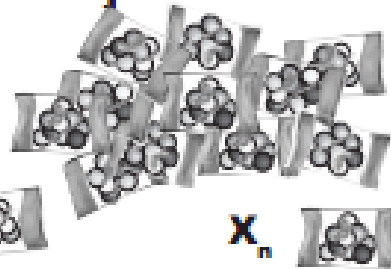


Distribusi sampling untuk rata-rata

- contoh



Sample of X



Each X_i is an independent observation of X , so each packet has the same expectation and variance for the number of gumballs.

This is the mean of the sample, the mean number of gumballs in the packets.

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

$$E(X_1) = \mu$$

$$\text{Var}(X_1) = \sigma^2$$

$$E(X_n) = \mu$$

$$\text{Var}(X_n) = \sigma^2$$

Ekspektasi $\bar{X}$

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right)$$

These two expressions are the same, just written in a different way.

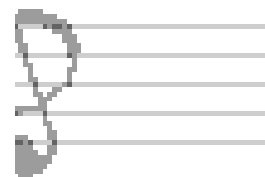
$$= E\left(\frac{1}{n} X_1 + \frac{1}{n} X_2 + \dots + \frac{1}{n} X_n\right)$$

$$= E\left(\frac{1}{n} X_1\right) + E\left(\frac{1}{n} X_2\right) + \dots + E\left(\frac{1}{n} X_n\right)$$

We can split this into n separate expectations because $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Every expectation includes $1/n$, so we can take it out of the expression. This comes from $E(aX) = aE(X)$.

$$\rightarrow = \frac{1}{n} (E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n))$$



Variansi $\bar{X}$?

$$\text{Var}(\bar{X}) = \text{Var}\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right)$$

$$= \text{Var}\left(\frac{1}{n}X_1 + \frac{1}{n}X_2 + \dots + \frac{1}{n}X_n\right)$$

$$= \text{Var}\left(\frac{1}{n}X_1\right) + \text{Var}\left(\frac{1}{n}X_2\right) + \dots + \text{Var}\left(\frac{1}{n}X_n\right)$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^2 (\text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots + \text{Var}(X_n))$$

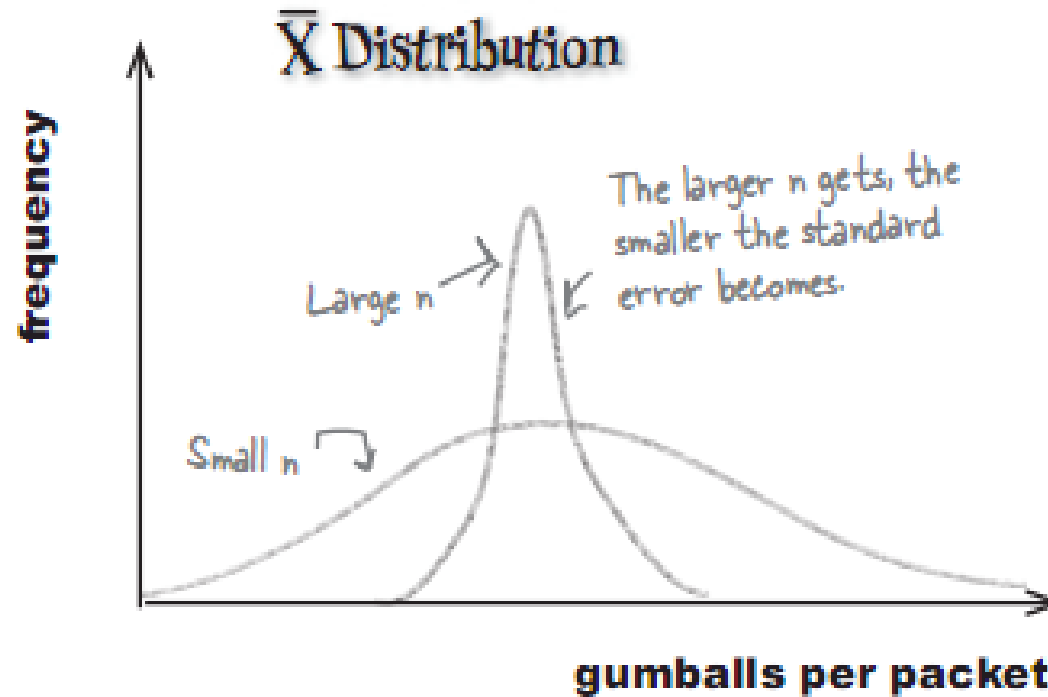
$$= \frac{1}{n^2} (\sigma^2 + \sigma^2 + \dots + \sigma^2)$$

$$= n \times \frac{1}{n^2} \sigma^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{n}$$



So...



If $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, then $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

These are the mean and variance of $\bar{X}$ that we found earlier.

Teorema Limit Pusat (CLT)

Jika sampel diambil dari suatu populasi dg distribusi non normal dan ukuran sampel besar maka rata-rata $\bar{X}$ diaproksimasikan berdistribusi Normal dengan rata-rata dan variansi populasi adalah μ, σ^2

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

↙ This is the mean and variance of $\bar{X}$.



Latihan

1. Misalkan $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ estimator untuk θ . Diketahui $E[\hat{\theta}_1] = \theta, E[\hat{\theta}_2] = \frac{\theta}{2}, V(\hat{\theta}_1) = 10, V(\hat{\theta}_2) = 4$. Menurut Anda manakah estimator terbaik? Jelaskan!

2. Data diketahui :

425 431 416 419 421 436 418 410 431 433 423 426 410 435 436 428 411
426 409 437 422 428 413 416

a. Hitung estimasi titik untuk rata-rata, standar deviasi

b. Hitung estimasi titik untuk proporsi data yang bernilai lebih dari 430

