BAB 2

BAGUAN 2

VR INDEPENDEN

Contoh

		x_2			
		0	1	2	$f_1(x_1)$
x_1	0	0.1	0.2	0.1	0.4
	1	0.1	0.2	0.1	0.4
	2	0.1	0.1	0.0	0.2
$f_2(x_2)$		0.3	0.5	0.2	

$$f(1,1) = 0.2,$$
$$f_1(1) = 0.4, \quad f_2(1) = 0.5 \Rightarrow f_1(1) f_2(1) = 0.2$$
$$f(1,1) = f_1(1) f_2(1)$$

kejadian $[X_1 = 1]$ dan $[X_2 = 1]$ saling independen

DEFINISI VR INDEPENDEN

variabel random $X_1, X_2, \ldots, X_k$ dikatakan saling independen

jika untuk setiap $a_i < b_i$,

$$P[a_i \le X_i \le b_i, \ldots, a_k \le X_k \le b_k] = \prod_{i=1}^{k} P[a_i \le X_i \le b_i]$$

TEOREMA

variabel random $X_1, X_2, \ldots, X_k$ saling independen

jhj

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_k) = F(x_1)F(x_2)\ldots F(x_k)$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = f_1(x_1)f_2(x_2)\ldots f_k(x_k)$$

TEOREMA

Dua variabel random X_1 dan X_2 dengan $f(x_1, x_2)$
saling independen jhj

1. $\{(x_1, x_2) \mid f(x_1, x_2) > 0\}$ adalah produk kartesian AxB
2. Pdf gabungan x_1 dan x_2 dapat dinyatakan $f(x_1, x_2) = g(x_1)h(x_2)$

contoh

1. $f(x_1, x_2) = 8x_1x_2, \quad 0 < x_1 < x_2 < 1$
2. $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2, 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1$
3. $X, Y \sim GEO(p)$
   a. $f_{X,Y}(x, y)$
   b. $f_{X,T}(x, t), \quad T = X + Y$

DEFINISI PDF BERSYARAT

Jika X_1, X_2 vr diskrit atau kontinu dengan pdf gabungan $f(x_1, x_2)$ maka pdf bersyarat X_2 dengan syarat $X_1 = x_1$ didefinisikan:

$$f(x_2|x_1) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_1(x_1)}$$

untuk nilai $x_1 \ni f_1(x_1) > 0$ dan 0 untuk nilai yang lain

TH

Jika X_1 dan X_2 vr dengan pdf gabungan $f(x_1,x_2)$
dan pdf marginal $f_1(x_1)$, $f_2(x_2)$ maka :

$$f(x_1,x_2) = f_1(x_1)\, f\left(x_2 \middle| x_1\right) = f_2(x_2)\, f\left(x_1 \middle| x_2\right)$$

jika X_1 dan X_2 independen maka

$$f\left(x_2 \middle| x_1\right) = f_2(x_2)$$

$$f\left(x_1 \middle| x_2\right) = f_1(x_1)$$

CONTOH

$$f(x, y) = x + y,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1$$

a. $f\left(y \middle| x\right)$

b. $P\left[0 < Y < 0.5 \middle| X = 0.25\right]$

TH

Jika $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_k)$ dengan pdf gabungan $f(x_1, x_2, ..., x_k)$ dan
jika $Y = u(X_1, X_2, ..., X_k)$ adalah fungsi $\mathbf{X}$ maka

$$E(Y) = E_X[u(X_1, X_2, ..., X_k)] = \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_2} u(x_1, x_2, ..., x_k) f(x_1, x_2, ..., x_k), \ \mathbf{X} \text{ diskrit}$$

$$E(Y) = E_X[u(X_1, X_2, ..., X_k)] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2, ..., x_k) f(x_1, x_2, ..., x_k) dx_1 dx_2 ... dx_k, \ \mathbf{X} \text{ kontinu}$$

Jika X_1 dan X_2 vR dengan pdf gabungan $f(x_1, x_2)$ maka

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$$

Jika X_1 dan X_2 vR independen dan $g(x), h(y)$ fungsi maka $E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y))$

DEFINISI

kovariansi dari pasangan vr X dan Y didefinisikan :

$$\sigma_{XY} = Cov(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

teorema

Jika X dan Y vr maka :

$$\sigma_{XY} = Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$Cov(X,Y) = 0$ jika X dan Y independen

Jika X_1 dan X_2 vr dengan pdf gabungan $f(x_1, x_2)$ maka :

$$Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, X_2)$$

$Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2)$, jika X_1, X_2 independen

DEF

Jika X dan Y vr berdistribusi gabungan maka ekspektasi bersyarat Y dengan syarat $X = x$ maka:

$$E(Y|x) = \sum_y y\ f(y|x), \quad X \text{ dan } Y \text{ diskrit}$$

$$E(Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\ f(y|x)\,dy, \quad X \text{ dan } Y \text{ kontinu}$$

contoh

$$f(y|x) = \frac{2}{x} \qquad 0 < y < \frac{x}{2}$$

TH

Jika X dan Y vr berdistribusi gabungan maka $E\left[E\left(Y|x\right)\right] = E\left(Y\right)$

Jika X dan Y vr independen maka $E\left(Y|x\right) = E\left(Y\right)$ dan Y $E\left(X|y\right) = E\left(X\right)$

DEFINISI

The **conditional variance** of Y given $X = x$ is given by

$$\operatorname{Var}(Y \mid x) = E\{[Y - E(Y \mid x)]^2 \mid x\}$$

THEOREMA

If X and Y are jointly distributed random variables, then

$$\operatorname{Var}(Y) = E_X[\operatorname{Var}(Y \mid X)] + \operatorname{Var}_X[E(Y \mid X)]$$