Bab 3

Bagian 2

Joint Transformation

Jika **X** adalah vektor vr diskrit dengan pdf gabungan $f_X(x)$ dan $Y = u(X)$ merupakan transf 1-1 maka pdf gabungan dari Y adalah :

$$f_Y(y_1, y_2, \ldots, y_k) = f_X(x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

Dengan $x_1, x_2, \ldots x_k$ adalah penyelesaian dari $y = u(x)$ dan tergantung dari $y_1, y_2, \ldots y_k$

Jika bukan transf 1-1 maka $x_j = (x_{1j}, \ldots x_{kj})$

$$f_Y(y_1, y_2, \ldots, y_k) = \sum_j f_X(x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{kj})$$

Teorema

Misalkan $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$ adalah vektor vr kontinu

dengan pdf gabungan $f_X(x_1, \ldots, x_k) > 0$ pada A

dan $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$ transf 1-1, $Y_i = u_i(X_1, \ldots, X_k), \quad i = 1, \ldots, k$

Jika Jakobian-nya kontinu dan tidak kosong maka pdf gabungan Y

$$f_{\mathbf{Y}}(y_1, \ldots, y_k) = f_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_k)|J|$$

$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ is the solution of $\mathbf{y} = u(x)$

Contoh 1

Diketahui $X_i \sim EXP(1)$

1. $Y_1 = X_1$

   $Y_2 = X_1 + X_2$

2. $Y_1 = X_1 - X_2$

   $Y_2 = X_1 + X_2$

Tentukan $f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)$ dan $f_{Y_1}(y_1), f_{Y_2}(y_2)$

Jumlahan vR

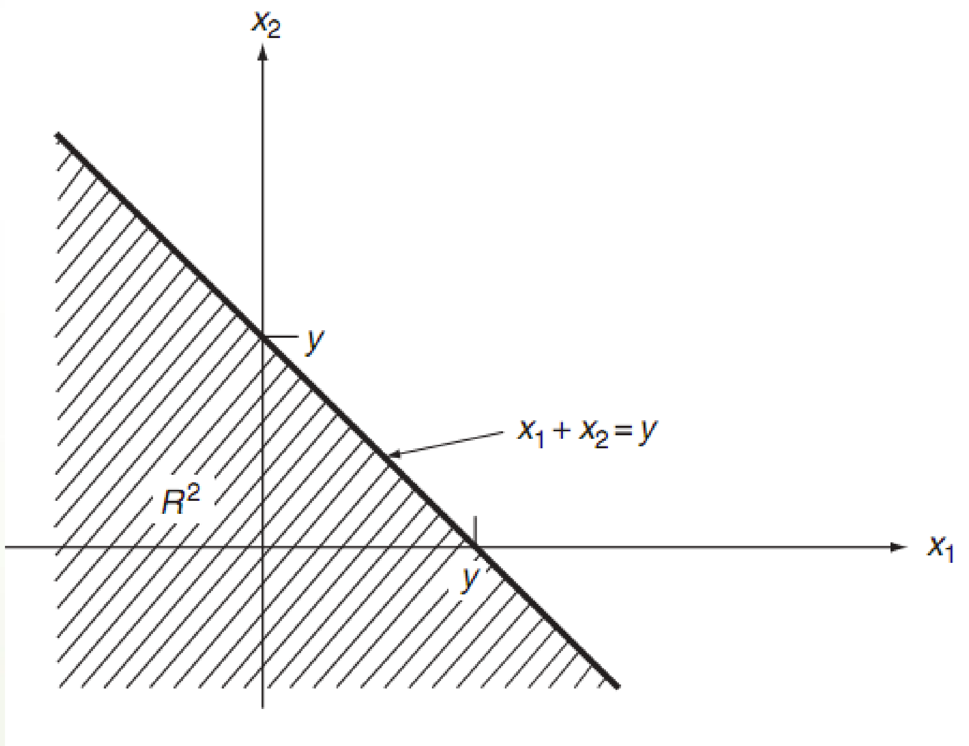
Misal jumlahan $Y = g(X_1, \ldots, X_n) = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

untuk $Y = X_1 + X_2$

Berlaku:

$$F_Y(y) = \iint_{x_1 + x_2 \le y} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{y - x_2} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$$



Region R^2: $x_1 + x_2 \le y$

Th

Misal $Y = X_1 + X_2$

dengan X_1 dan X_2 vr kontinu dan saling independen maka

konvolusi dari pdf X_1 dan X_2 adalah:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(y - x_2) f_{X_2}(x_2) dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_2}(y - x_1) f_{X_1}(x_1) dx_1$$

Contoh 2

Tentukan $f_Y = X_1 + X_2$ dengan X_1 dan X_2 saling independen dan identik

$$f_{X_1}(x_1) = \begin{cases} ae^{-ax_1}, x_1 \geq 0 \\ 0, \text{selainnya} \end{cases}$$

Teorema 6.4.1

Jika $X_1, X_2, ..., X_n$ adalah vr independen dengan mgf $M_{X_i}(t)$

Maka mgf dari $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

adalah $M_Y(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \cdots M_{X_n}(t)$

Contoh1

Tentukan mgf dari $Y = \sum_{i=1}^{k} X_i$ dan distribusi dari Y jika

1. $X_1, X_2, ..., X_k \sim iiBIN(n_i, p)$
2. $X_1, X_2, ..., X_k \sim iiPOI(\mu_i)$
3. $X_1, X_2, ..., X_k \sim iiGAM(\theta, \kappa_i)$