

BAB 3

FUNGSI Variabel Random

Motivasi

Jika $X \sim f_X(x)$ maka $Y = u(X) \sim \text{?????}$



1. TEKNIK CDF

misal $Y = u(X)$, kita dapat mendefinisikan $A_y = \{x | u(x) \leq y\}$

Perhatikan bahwa $[Y \leq y]$ dan $[x \in A_y]$,

Jadi

$$F_Y(y) = P[u(X) \leq y]$$

contoh:

jika $[u(x) \leq y]$ dapat dinyatakan dalam $[x_1 \leq X \leq x_2]$

Kasus Kontinu,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx \\ &= F_X(x_2) - F_X(x_1) \end{aligned}$$

$$\text{dan } f_Y(y) = \left(\frac{d}{dy} \right) F_Y(y)$$

CONTOH 1

1. Diketahui $F_X(x) = 1 - e^{-2x}$, $0 < x < \infty$,

Jika $Y = e^X$ maka tentukan $f_Y(y)$

2. Misalkan X mempunyai pdf $f_X(x)$.

Jika $Y = X^2$ maka tentukan $F_Y(y)$



TEOREMA

Misalkan $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ adalah vektor vr kontinu berdimensi k dengan pdf gabungan $f(x_1, \dots, x_k)$.

Jika $Y = u(\mathbf{X})$ adalah fungsi dari $\mathbf{X}$ maka

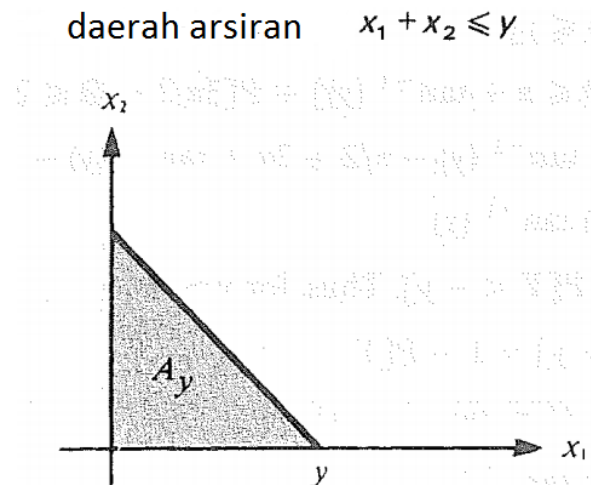
$$F_Y(y) = P[u(\mathbf{X}) \leq y] \\ = \int \cdots \int_{A_y} f(x_1, \dots, x_k) dx_1 \cdots dx_k$$

dengan $A_y = \{x | u(x) \leq y\}$

contoh 2

$X_i \sim EXP(1)$

Jika $Y = X_1 + X_2$ maka tentukan $F_Y(y)$



2. METODE TRANSFORMASI

METODE TRANSF 1-1

Teorema 6.3.1

Kasus Diskrit

Diketahui $X \sim f_X(x)$

misalkan $Y = u(X)$ merupakan transformasi 1-1

Jika $x = w(y)$

maka

$$f_Y(y) = f_X(w(y)), \quad y \in B, B = \{y \mid f_Y(y) > 0\}$$

Contoh 3

Diketahui $X \sim GEO(p)$

Jika $Y = X - 1$ maka tentukan $f_Y(y)$

TEOREMA 6.3.2

KASUS KONTINU

Diketahui $X \sim f_X(x)$

Misalkan $Y = u(X)$ transformasi 1-1 dari A ke B

dengan $A = \{x | f_X(x) > 0\}$, $B = \{y | f_Y(y) > 0\}$

$$Y = u(X) = \begin{cases} u(x) \leq y \text{ fungsi naik} & \text{j.h.j } x \leq w(y) \\ u(x) \geq y \text{ fungsi turun} & \text{j.h.j } x \geq w(y) \end{cases}$$

maka

$$f_Y(y) = f_X(w(y)) \left| \frac{d}{dy}(w(y)) \right|$$

Contoh 4

Diketahui $X \sim f_X(x)$, dengan $f_X(x) = 2e^{-2x}$

Jika $Y = e^X$ maka tentukan $f_Y(y)$

CONTOH 5

Pdf dari X diberikan: $f_X(x) = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}, \quad -\infty < x < \infty$

Tentukan pdf dari Y jika diketahui $Y = 2X + 1$

METODE TRANSFORMASI: BUKAN 1-1

Kasus DISKRIT

Diketahui $X \sim f_X(x)$

Misalkan $Y = u(X)$ bukan 1-1

Jika $x_j = w_j(y)$

maka

$$f_Y(y) = \sum_j f_X(w_j(y))$$

Contoh 6

Diketahui $X \sim f_X(x) = \frac{4}{31} \left(\frac{1}{2} \right)^x$, $x = -2, -1, 0, 1, 2$

Jika $Y = |X|$ maka tentukan $f_Y(y)$

KASUS KONTINU

Diketahui $X \sim f_X(x)$

Jika $Y = u(X)$ bukan 1-1
maka

$$f_Y(y) = \sum_j f_X(w_j(y)) \left| \frac{d}{dy} (w_j(y)) \right|$$

Contoh 7

1. Diketahui $f_X(x) = \frac{x^2}{3}$, $-1 < x < 2$,

Jika $Y = X^2$ maka tentukan $f_Y(y)$

2. Tentukan pdf $Y = X^2$ dimana X berdistribusi Normal

dengan $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $-\infty < x < \infty$