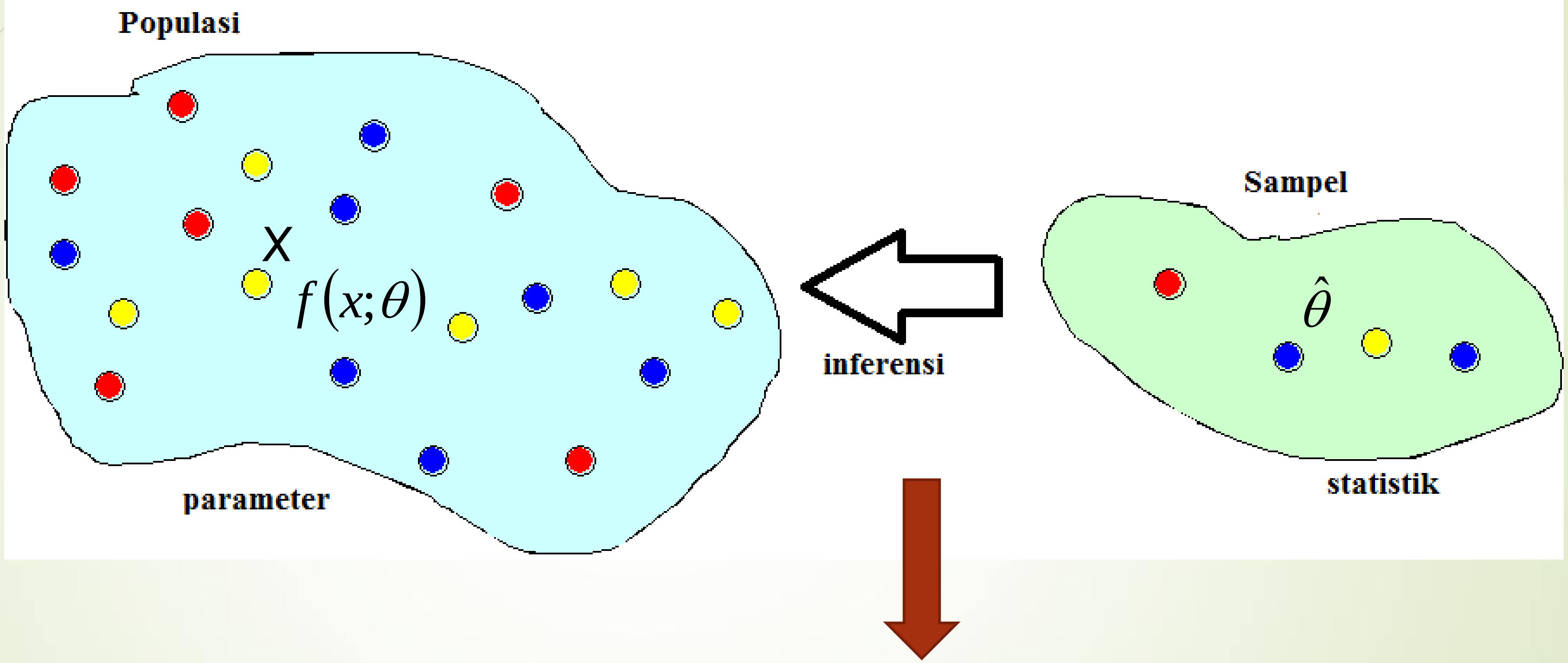
Bab 1

ESTIMASI TITIK

Pengantar...

- **Masih ingat tentang statistik dan parameter?**



Estimasi Titik: Untuk memberikan nilai yang tepat untuk θ berdasarkan data yang diamati dari populasi
Estimasi titik → tergantung dari nilai observasi X

Definisi 9.1.1

Statistik $T = l(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ yang digunakan untuk mengestimasi nilai $\tau(\theta)$ disebut dengan estimator $\tau(\theta)$

Metode Estimasi Titik

Metode Momen
Method of Moments Estimator
(MME)

Metode Likelihood
Method Likelihood Estimator
(MLE)

Metode Momen (MME)

- Misal fungsi densitas probabilitas (pdf), $f(x;\theta_1,\theta_2,\ldots\theta_k)$ tergantung dari satu atau lebih parameter $\theta_1,\theta_2,\ldots\theta_k$

Jika $X_1, X_2,\ldots, X_k$ adalah sampel random dari $f(x;\theta_1,\theta_2,\ldots\theta_k)$ maka momen disekitar pusat ke-j dari variabel random **X** :

$$\mu_j^{'}(\theta_1,\ldots,\theta_k) = E(X^j), j = 1,2,\ldots,k$$

Definisi 9.2.1

Jika $X_1, X_2,\ldots, X_k$ adalah sampel random dari $f(x;\theta_1,\theta_2,\ldots\theta_k)$ maka momen *k* sampel pertama

$$M_j^{'} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^j}{n}, j = 1,2,\ldots,k$$

MME

Secara umum :

$$M_j^{'} = \mu_j^{'}(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_{21},\cdots,\hat{\theta}_k), j = 1,2,\ldots,k$$

contoh 1

Sampel variabel random dari distribusi dengan dua parameter tidak diketahui, rata-rata μ dan variansi σ^2 maka tentukan $\hat{\mu}$ dan $\hat{\sigma}^2$

contoh 2

Sampel variabel random dari distribusi Gamma $X_i \sim GAM(\theta, \kappa)$

Tentukan $\hat{\theta}, \hat{\kappa}$

contoh 3

Sampel variabel random dari distribusi Exponensial $X_i \sim EXP(\theta)$ maka estimasi probabilitas $p(\theta) = P(X \geq 1)$

Metode Maksimum Likelihood

Definition 9.2.2

Fungsi densitas gabungan dari n variabel random $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dihitung saat $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah $f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$

Untuk fungsi Likelihood θ dari nilai $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dinotasikan $L(\theta)$

Jika $X_1, X_2, \ldots, X_n$ merepresentasikan sampel random dari $f(x;\theta)$ maka

$$L(\theta) = f(x_1;\theta) \cdots f(x_n;\theta)$$

Definition 9.2.3

Misalkan $L(\theta) = f(x_1, \ldots, x_n; \theta), \theta \in \Omega$ adalah pdf gabungan $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Untuk suatu himpunan observasi $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nilai $\hat{\theta}$ dalam Ω, $L(\theta)$ adalah estimasi maksimum likelihood (maximum likelihood estimate/MLE) dari nilai θ memenuhi :

$$f(x_1, \ldots, x_n; \hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Omega} f(x_1, \ldots, x_n; \theta)$$

Contoh 4

Sampel variabel random dari distribusi Poisson $X_i \sim POI(\theta)$ dan distribusi Eksponensial $X_i \sim EXP(\theta)$

Maka tentukan $\hat{\theta}$ dengan MLE

Contoh 5

Sampel variabel random dari distribusi Normal $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

Maka tentukan $\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2$ dengan MLE

Teorema. Sifat Invariance

Jika $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k\right)$ merupakan MLE dari $\boldsymbol{\theta} = \left(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k\right)$
maka MLE dari $\boldsymbol{\tau} = \left(\tau_1(\theta), \tau_2(\theta), \ldots, \tau_r(\theta)\right)$ adalah
$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \left(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \ldots, \hat{\tau}_r\right) = \left(\tau_1\left(\hat{\theta}\right), \tau_2\left(\hat{\theta}\right), \ldots, \tau_r\left(\hat{\theta}\right)\right), 1 \le r \le k$

Latihan :

1. Nomor 1a
2. Nomor 3
3. Nomor 5