BAB 2
ANAVA 2 JALAN

→Merupakan pengembangan dari ANAVA 1 Jalan

Jika pada ANAVA 1 jalan → 1 Faktor

Jika pada ANAVA 2 jalan → 2 Faktor

Model Linier

Asumsi: Model efek Tetap!

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \begin{cases} i = 1,\ldots,a \\ j = 1,\ldots,n \end{cases}$$

Satu faktor yang diteliti

Anava 1 jalan

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk} \begin{cases} i = 1,2,\ldots,a \\ j = 1,2,\ldots,b \\ k = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

Dua faktor yang diteliti, tanpa interaksi

Anava 2 jalan tanpa interaksi

RBRL (Ranc. Blok Random Lengkap)

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \begin{cases} i = 1,2,\ldots,a \\ j = 1,2,\ldots,b \\ k = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

Dua faktor yang diteliti, dg interaksi

Anava 2 jalan dengan interaksi

Ranc. Faktorial

Contoh di bidang industri

Seorang eksperimenter ingin mengetahui pengaruh 3 lempeng (A) pada 3 tingkat suhu (B) 15, 70 dan 125 derajat F. 4 baterai dites pada tiap kombinasi antara faktor lempeng dan suhu.

Daya hidup Baterai (jam)

Tipe Material	Temperatur (°F)					
	15		70		125	
1	130	155	34	40	20	70
	74	180	80	75	82	58
2	150	188	136	122	25	70
	159	126	106	115	58	45
3	138	110	174	120	96	104
	168	160	150	139	82	60

Pertanyaan yang muncul adalah :

1. **Apakah faktor lempeng berpengaruh terhadap daya hidup baterai ?**

2. **Apakah faktor suhu berpengaruh terhadap daya hidup baterai?**

3. **Apakah jenis lempeng material memberikan daya hidup baterai yang seragam tanpa tergantung dari suhu?**

Pertanyaan kedua inilah yang mengindikasikan kita menggunakan rancangan faktorial 2 faktor (2 jalan) → adanya interaksi antara faktor lempeng (A) dengan faktor suhu (B)

- Contoh di atas merupakan dari rancangan faktorial (anava 2 jalan).

Jika y_{ijk} variabel respon saat faktor A pada tingkat ke-i ($i=1,2,\ldots,a$) dan faktor B pada tingkat ke-j ($j=1,2,\ldots,b$) untuk perulangan ke-k ($k=1,2,\ldots,n$) maka model linier nya adalah:

$$y_{ijk}=\mu+\tau_i+\beta_j+(\tau\beta)_{ij}+\varepsilon_{ijk}\begin{cases} i=1,2,\ldots,a \\ j=1,2,\ldots,b \\ k=1,2,\ldots,n \end{cases}$$

Asumsi model Efek Tetap

1. $\sum_{i=1}^{a}\tau_i=0, \sum_{j=1}^{b}\beta_j=0, \sum_{i=1}^{a}(\tau\beta)_{ij}=\sum_{j=1}^{b}(\tau\beta)_{ij}=0$
2. $\varepsilon_{ijk}\sim NID(0,\sigma^2)$

Interaksi…(Netter *et al*: 677)

Ilustrasi1 : tidak ada interaksi

Misal dilakukan penelitian menggunakan rancangan anava 2 jalan untuk mengetahui pengaruh gender (male dan female) dan umur (young, middle, old).

(a) Mean Learning Times (in minutes)

Factor A—Gender	Factor B—Age $j=1$ Young	$j=2$ Middle	$j=3$ Old	Row Average
$i=1$ Male	9 (μ_{11})	11 (μ_{12})	16 (μ_{13})	12 ($\mu_{1\cdot}$)
$i=2$ Female	9 (μ_{21})	11 (μ_{22})	16 (μ_{23})	12 ($\mu_{2\cdot}$)
Column average	9 ($\mu_{\cdot 1}$)	11 ($\mu_{\cdot 2}$)	16 ($\mu_{\cdot 3}$)	12 ($\mu_{\cdot\cdot}$)

(b) Main Gender Effects (in minutes)

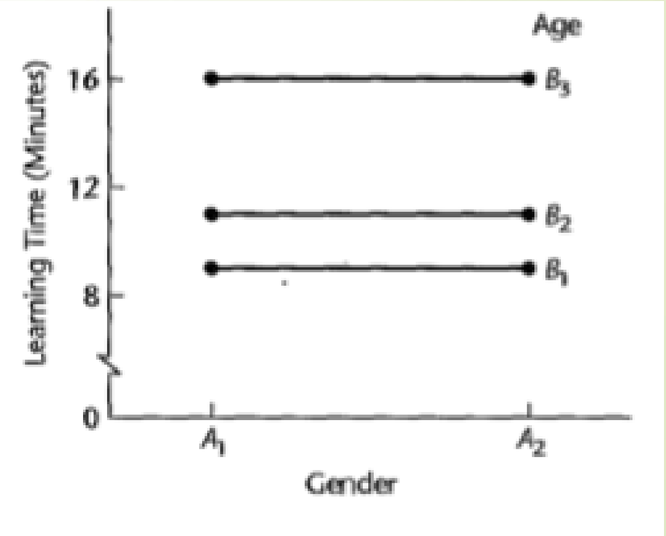
$$\alpha_1 = \mu_{1\cdot} - \mu_{\cdot\cdot} = 12 - 12 = 0$$
$$\alpha_2 = \mu_{2\cdot} - \mu_{\cdot\cdot} = 12 - 12 = 0$$

(c) Main Age Effects (in minutes)

$$\beta_1 = \mu_{\cdot 1} - \mu_{\cdot\cdot} = 9 - 12 = -3$$
$$\beta_2 = \mu_{\cdot 2} - \mu_{\cdot\cdot} = 11 - 12 = -1$$
$$\beta_3 = \mu_{\cdot 3} - \mu_{\cdot\cdot} = 16 - 12 = 4$$

$$\mu_{11} = \mu_{\cdot\cdot} + \alpha_1 + \beta_1 = 12 + 0 + (-3) = 9$$
$$\mu_{23} = \mu_{\cdot\cdot} + \alpha_2 + \beta_3 = 12 + 0 + 4 = 16$$

Age Effect but No Gender Effect, with No Interactions—Learning Example.



A1: efek utama Faktor A pd tk 1
B1 : efek utama Faktor B pada tingkat 1

Secara umum

- Efek utama Faktor A pada tingkat ke-i $\alpha_i = \mu_{i\bullet} - \mu_{\bullet\bullet}$
- Efek utama Faktor B pada tingkat ke-j $\beta_j = \mu_{\bullet j} - \mu_{\bullet\bullet}$

(a) Mean Learning Times (in minutes)

	Factor B—Age			
Factor A—Gender	$j=1$ Young	$j=2$ Middle	$j=3$ Old	Row Average
$i=1$ Male	9 (μ_{11})	11 (μ_{12})	16 (μ_{13})	12 ($\mu_{1\cdot}$)
$i=2$ Female	9 (μ_{21})	11 (μ_{22})	16 (μ_{23})	12 ($\mu_{2\cdot}$)
Column average	9 ($\mu_{\cdot 1}$)	11 ($\mu_{\cdot 2}$)	16 ($\mu_{\cdot 3}$)	12 ($\mu_{\cdot\cdot}$)

(b) Main Gender Effects (in minutes)

$\alpha_1 = \mu_{1\cdot} - \mu_{\cdot\cdot} = 12 - 12 = 0$

$\alpha_2 = \mu_{2\cdot} - \mu_{\cdot\cdot} = 12 - 12 = 0$

(c) Main Age Effects (in minutes)

$\beta_1 = \mu_{\cdot 1} - \mu_{\cdot\cdot} = 9 - 12 = -3$

$\beta_2 = \mu_{\cdot 2} - \mu_{\cdot\cdot} = 11 - 12 = -1$

$\beta_3 = \mu_{\cdot 3} - \mu_{\cdot\cdot} = 16 - 12 = 4$

- Perhatikan bahwa

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0, \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$$

- Efek faktor aditif

$$\mu_{ij} = \mu_{\bullet\bullet} + \alpha_i + \beta_j \qquad 1$$

$$\mu_{ij} = \mu_{i\bullet} + \mu_{\bullet j} - \mu_{\bullet\bullet} \qquad 2$$

$$\mu_{ij} = \mu_{ij'} + \mu_{i'j} - \mu_{i'j'} \quad , i \neq i', j \neq j' \qquad 3$$

- Jika rerata perlakuan dapat dinyatakan dalam bentuk 1, 2 atau 3 maka
Dapat dikatakan faktor tidak saling berinteraksi atau efek faktor adalah aditif
- Jika tidak ada interaksi maka efek dua faktor dapat digambarkan scr terpisah
dengan analisis rerata tingkat faktor atau efek faktor utama
- Analisis efek factor lebih sederhana apabila tidak ada interaksi

Ilustrasi 2

(a) Mean Learning Times (in minutes)

Factor A—Gender	$j=1$ Young	$j=2$ Middle	$j=3$ Old	Row Average
	Factor B—Age			
$i=1$ Male	11 (μ_{11})	13 (μ_{12})	18 (μ_{13})	14 ($\mu_{1\cdot}$)
$i=2$ Female	7 (μ_{21})	9 (μ_{22})	14 (μ_{23})	10 ($\mu_{2\cdot}$)
Column average	9 ($\mu_{\cdot 1}$)	11 ($\mu_{\cdot 2}$)	16 ($\mu_{\cdot 3}$)	12 ($\mu_{\cdot\cdot}$)

(b) Main Gender Effects (in minutes)

$\alpha_1 = \mu_{1\cdot} - \mu_{\cdot\cdot} = 14 - 12 = 2$

$\alpha_2 = \mu_{2\cdot} - \mu_{\cdot\cdot} = 10 - 12 = -2$

(c) Main Age Effects (in minutes)

$\beta_1 = \mu_{\cdot 1} - \mu_{\cdot\cdot} = 9 - 12 = -3$

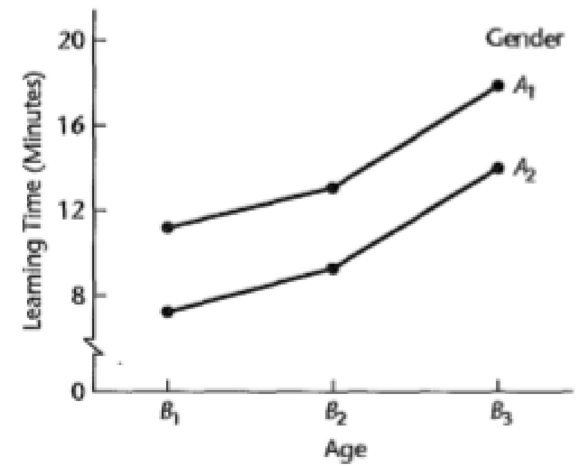
$\beta_2 = \mu_{\cdot 2} - \mu_{\cdot\cdot} = 11 - 12 = -1$

$\beta_3 = \mu_{\cdot 3} - \mu_{\cdot\cdot} = 16 - 12 = 4$

$$\mu_{ij} = \mu_{\cdot\cdot} + \alpha_i + \beta_j$$

$$\mu_{11} = \mu_{\cdot\cdot} + \alpha_1 + \beta_1 = 12 + 2 + (-3) = 11$$

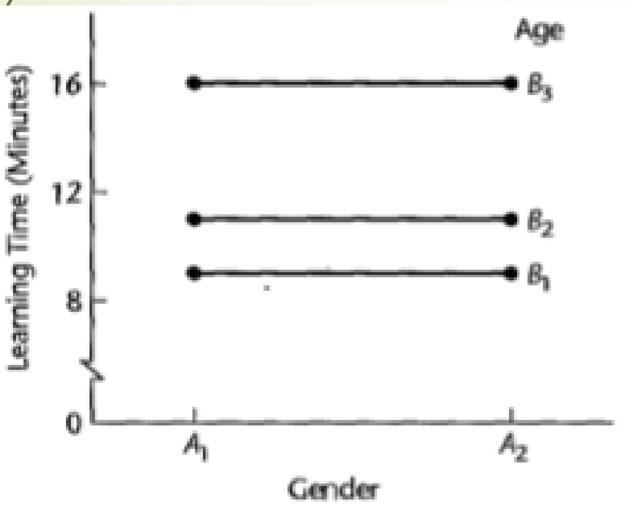
ge and ender Effects, with No Interactions- earning xample.



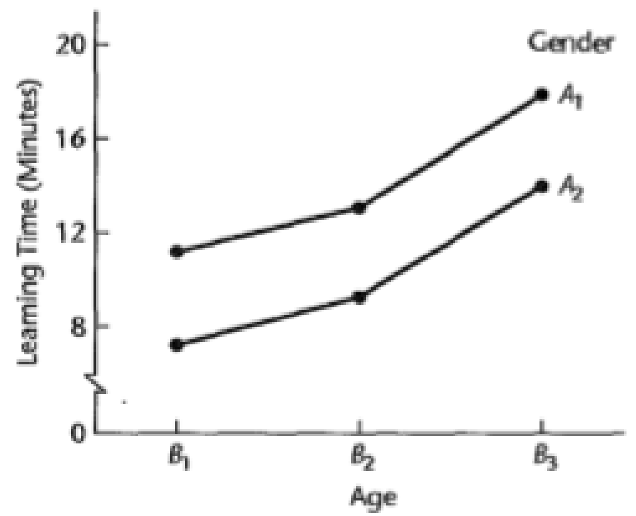
Dua faktor dikatakan tidak berinteraksi jika …

- Perbedaan rerata respon untuk setiap dua tingkat faktor B adalah sama untuk setiap tingkat faktor A
- Perbedaan rerata respon untuk setiap dua tingkat faktor A adalah sama untuk setiap tingkat faktor B
- Kurva rerata respon untuk tingkat yang berbeda berbentuk paralel

Age Effect but No Gender Effect, with No Interactions—Learning Example.



Age and Gender Effects, with No Interactions-Learning Example.



Ilustrasi 3

(a) Mean Learning Times (in minutes)					
	Factor *B*—Age				
Factor *A*—Gender	$j=1$ Young	$j=2$ Middle	$j=3$ Old	Row Average	Main Gender Effect
$i=1$ Male	9 (μ_{11})	12 (μ_{12})	18 (μ_{13})	13 ($\mu_{1\cdot}$)	1 (α_1)
$i=2$ Female	9 (μ_{21})	10 (μ_{22})	14 (μ_{23})	11 ($\mu_{2\cdot}$)	−1 (α_2)
Column average	9 ($\mu_{\cdot 1}$)	11 ($\mu_{\cdot 2}$)	16 ($\mu_{\cdot 3}$)	12 ($\mu_{\cdot\cdot}$)	
Main age effect	−3 (β_1)	−1 (β_2)	4 (β_3)		

(b) Interactions (in minutes)				
	$j=1$	$j=2$	$j=3$	Row Average
$i=1$	−1	0	1	0
$i=2$	1	0	−1	0
Column average	0	0	0	0

definisi interaksi $$(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - (\mu_{\cdot\cdot} + \alpha_i + \beta_j)$$

atau $$(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - \mu_{i\cdot} - \mu_{\cdot j} + \mu_{\cdot\cdot}$$

contoh
$$\begin{aligned}(\alpha\beta)_{13} &= \mu_{13} - (\mu_{\cdot\cdot} + \alpha_1 + \beta_3)\\ &= 18 - (12 + 1 + 4)\\ &= 1\end{aligned}$$

Deteksi interaksi

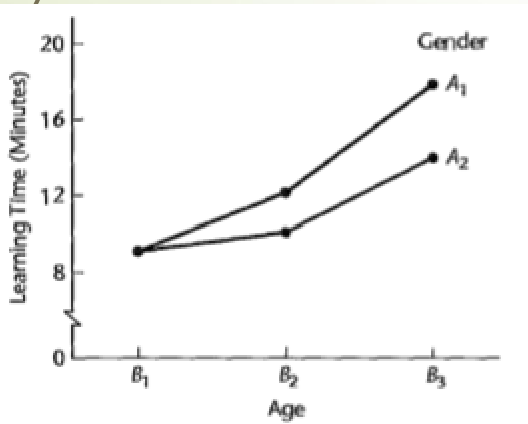
a. Memeriksa apakah rerata respon dapat dinyatakan dalam bentuk $\mu_{ij} = \mu_{\bullet\bullet} + \alpha_i + \beta_j$

b. Memeriksa apakah perbedaan antara rerata respon untuk setiap dua tingkat faktor B adalah sama untuk setiap tingkat faktor A

c. Memeriksa apakah perbedaan antara rerata respon untuk setiap dua tingkat faktor A adalah sama untuk setiap tingkat faktor B

d. Memeriksa apakah kurva rerata perlakuan untuk tingkat faktor yang berbeda adalah paralel

Age and Gender Effects, with Important Interactions—Learning Example.



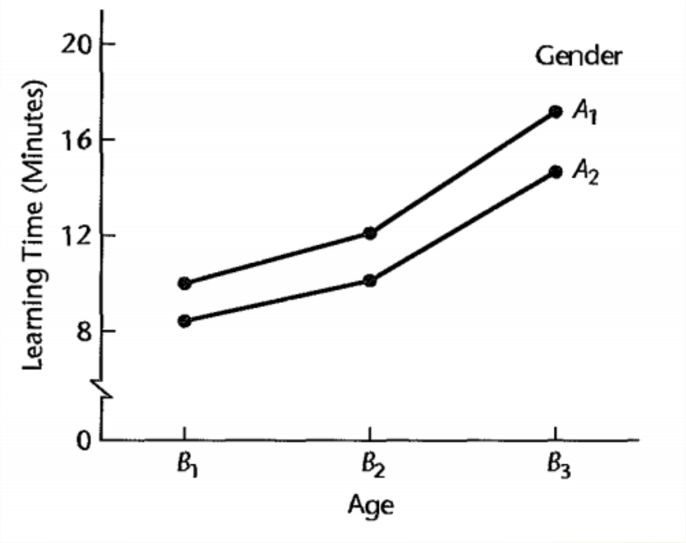
(a) Mean Learning Times (in minutes)

Factor A—Gender	Factor B—Age: $j=1$ Young	$j=2$ Middle	$j=3$ Old	Row Average	Main Gender Effect
$i=1$ Male	9 (μ_{11})	12 (μ_{12})	18 (μ_{13})	13 ($\mu_{1\cdot}$)	1 (α_1)
$i=2$ Female	9 (μ_{21})	10 (μ_{22})	14 (μ_{23})	11 ($\mu_{2\cdot}$)	−1 (α_2)
Column average	9 ($\mu_{\cdot 1}$)	[illegible] ($\mu_{\cdot 2}$)	16 ($\mu_{\cdot 3}$)	12 ($\mu_{\cdot\cdot}$)	
Main age effect	−3 (β_1)	−1 (β_2)	4 (β_3)		

→ Interaksi Penting (important interaction)

UnImportant Interaction

- Ketika dua faktor A dan B saling berinteraksi tapi kecil, misal digambarkan seperti:



- Garis hampir parallel
- Pada kasus unimportant interactions, analisis efek factor dapat dilakukan hanya pada efek utama tanpa interaksi

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \begin{cases} i = 1,2,\ldots,a \\ j = 1,2,\ldots,b \\ k = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

$$\mu_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij}$$

$$y_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

Jadi estimasi dari y adalah

$$\begin{aligned} E[y_{ijk}] &= E[\mu_{ij} + \varepsilon_{ijk}] \\ &= E[\mu_{ij}] + E[\varepsilon_{ijk}] \\ \hat{y}_{ijk} &= \hat{\mu}_{ij} \end{aligned}$$

Estimasi dari μ_{ij}

$$E\lfloor y_{ij}\rfloor = E\lfloor \mu_{ij} + \varepsilon_{ij}\rfloor = E\lfloor \mu_{ij}\rfloor = \hat{\mu}_{ij} \Rightarrow \hat{\mu}_{ij} \text{ ???}$$

$$Q_{ij} = \sum_{k}^{n}\left(y_{ijk} - \mu_{ij}\right)^2$$

$$\frac{dQ_{ij}}{d\mu_{ij}} = 2\sum_{k}^{n}\left(y_{ijk} - \hat{\mu}_{ij}\right).-1 = 0$$

$$\sum_{k}^{n} y_{ijk} - \sum_{k}^{n}\hat{\mu}_{ij} = 0$$

$$\sum_{k}^{n} y_{ijk} = n\hat{\mu}_{ij}$$

$$\frac{\sum_{k}^{n} y_{ijk}}{n} = \hat{\mu}_{ij}$$

$$\hat{\mu}_{ij} = \frac{y_{ij\bullet}}{n} = \bar{y}_{ij\bullet}$$

Step-step uji Anava 2 jalan

1. Susun Hipotesis

$$H_{0A} : \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a = 0$$

$$H_{1A} : \text{paling tidak ada satu } \tau_i \neq 0$$

$$H_{0B} : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b = 0$$

$$H_{1B} : \text{paling tidak ada satu } \beta_{\mathrm{j}} \neq 0$$

$$H_{0AB} : (\tau\beta)_{ij} = 0, \forall ij$$

$$H_{1AB} : \text{paling tidak ada satu } (\tau\beta)_{ij} \neq 0$$

2.Pilih tingkat signifikansi

3. Susun Tabel ANAVA 2 Jalan

		Faktor B			
		1	2	...	b
Faktor A	1	$y_{111}, y_{112}, \ldots, y_{11n}$	$y_{121}, y_{122}, \ldots, y_{12n}$		$y_{1b1}, y_{1b2}, \ldots, y_{1bn}$
	2	$y_{211}, y_{212}, \ldots, y_{21n}$	$y_{221}, y_{222}, \ldots, y_{22n}$		$y_{2b1}, y_{2b2}, \ldots, y_{2bn}$
	$\vdots$				
	a	$y_{a11}, y_{a12}, \ldots, y_{a1n}$	$y_{a21}, y_{a22}, \ldots, y_{a2n}$		$y_{ab1}, y_{ab2}, \ldots, y_{abn}$

$$y_{i..} = \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \qquad \bar{y}_{i..} = \frac{y_{i..}}{bn} \qquad i = 1, 2, \ldots, a$$

$$y_{.j.} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \qquad \bar{y}_{.j.} = \frac{y_{.j.}}{an} \qquad j = 1, 2, \ldots, b$$

$$y_{ij.} = \sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \qquad \bar{y}_{ij.} = \frac{y_{ij.}}{n} \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, a \\ j = 1, 2, \ldots, b \end{array}$$

$$y_{...} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \qquad \bar{y}_{...} = \frac{y_{...}}{abn}$$

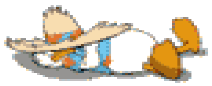
Partisi JKT anava 2 univariat

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(y_{ijk}-\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\bar{y}_{i\bullet\bullet}-\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}\right)+\left(\bar{y}_{\bullet j\bullet}-\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}\right)+\left(\bar{y}_{ij\bullet}-\bar{y}_{i\bullet\bullet}-\bar{y}_{\bullet j\bullet}+\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}\right)+\left(y_{ijk}-\bar{y}_{ij\bullet}\right)\right]^2$$

$$=\underbrace{bn\sum_{i=1}^{a}\left(\bar{y}_{i\bullet\bullet}-\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2}_{JK_A}+\underbrace{an\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{y}_{\bullet j\bullet}-\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2}_{JK_B}+\underbrace{n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{y}_{ij\bullet}-\bar{y}_{i\bullet\bullet}-\bar{y}_{\bullet j\bullet}+\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2}_{JK_{AB}}+\underbrace{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(y_{ijk}-\bar{y}_{ij\bullet}\right)^2}_{JK_S}$$

$$JK_T = JK_A + JK_B + JK_{AB} + JK_S$$



dengan

$$JK_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - \frac{y_{\bullet\bullet\bullet}^2}{abn}$$ no 1

$$JK_A = \frac{1}{bn}\sum_{i=1}^{a} y_{i\bullet\bullet}^2 - \frac{y_{\bullet\bullet\bullet}^2}{abn}$$ no 2

$$JK_B = \frac{1}{an}\sum_{j=1}^{b} y_{\bullet j\bullet}^2 - \frac{y_{\bullet\bullet\bullet}^2}{abn}$$ no 3

$$JK_{\text{Sub total}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij\bullet}^2 - \frac{y_{\bullet\bullet\bullet}^2}{abn}$$

$$JK_{AB} = JK_{\text{Sub total}} - JK_A - JK_B$$

$$JK_S = JK_T - JK_{AB} - JK_A - JK_B$$

Tabel ANAVA

Sumber Variansi	Derajat bebas (db)	Jumlah Kuadrat (JK)	Rataan Kuadrat (RK)	F Hitung
A	a-1	JKA	RKA=JKA/dbA	FA
B	b-1	JKB	RKB=JKB/dbB	FB
AB	(a-1)(b-1)	JK(AB)	RK(AB)=JK(AB)/db(AB)	FAB
Sesatan	ab(n-1)	JKS	RKS=JKS/db(S)	
Total	abn-1	JKT		

Contoh soal di atas

Tipe Material	Temperatur (°F)									
	15			70			125			$y_{i..}$
1	130	155	539	34	40	229	20	70	230	998
	74	180		80	75		82	58		
2	150	188	623	136	122	479	25	70	198	1300
	159	126		106	115		58	45		
3	138	110	576	174	120	583	96	104	342	1501
	168	160		150	139		82	60		
$y_{.j.}$	1738			1291			770			$3799 = y_{...}$

Temperatur (°F)									
15			70			125			$y_{i..}$
130	155	539	34	40	229	20	70	230	998
74	180		80	75		82	58		
150	188	623	136	122	479	25	70	198	1300
159	126		106	115		58	45		
138	110	576	174	120	583	96	104	342	1501
168	160		150	139		82	60		
	1738			1291			770		$3799 = y_{...}$

$$SS_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

$$= (130)^2 + (155)^2 + (74)^2 + \cdots + (60)^2 - \frac{(3799)^2}{36} = 77{,}646.97$$

$$SS_{\text{Material}} = \frac{1}{bn}\sum_{i=1}^{a} y_{i..}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

$$= \frac{1}{(3)(4)}[(998)^2 + (1300)^2 + (1501)^2] - \frac{(3799)^2}{36} = 10{,}683.72$$

$$SS_{\text{Temperature}} = \frac{1}{an}\sum_{j=1}^{b} y_{.j.}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

$$= \frac{1}{(3)(4)}[(1738)^2 + (1291)^2 + (770)^2] - \frac{(3799)^2}{36} = 39{,}118.72$$

$$SS_{\text{Interaction}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij.}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn} - SS_{\text{Material}} - SS_{\text{Temperature}}$$

$$= \frac{1}{4}[(539)^2 + (229)^2 + \cdots + (342)^2] - \frac{(3799)^2}{36} - 10{,}683.72$$

$$- 39{,}118.72 = 9613.78$$

$$SS_E = SS_T - SS_{\text{Material}} - SS_{\text{Temperature}} - SS_{\text{Interaction}}$$

$$= 77{,}646.97 - 10{,}683.72 - 39{,}118.72 - 9613.78 = 18{,}230.75$$

Tabel ANAVA

Analysis of Variance for Battery Life Data

Source of Variation	Sum of Squares	Degrees of Freedom	Mean Square	F_0
Material types	10,683.72	2	5,341.86	7.91
Temperature	39,118.72	2	19,559.36	28.97
Interaction	9,613.78	4	2,403.44	3.56
Error	18,230.75	27	675.21	
Total	77,646.97	35		

- Tolak HA karena F=7.91> F(0.05,2,27)=3.35. Jadi *tipe material* (jenis lempeng) berpengaruh terhadap daya hidup baterai
- Tolak HB karena F=28.97 > F(0.05,2,27)=3.35. jadi *temperatur* (suhu) berpengaruh terhadap daya hidup baterai
- Tolak HAB karena FAB=3.56 > F(0.05,4,27)=2.73. Jadi faktor interaksi berpengaruh terhadap daya hidup baterai. D.K.L jenis lempeng material tergantung dari suhu terhadap daya hidup baterai

Plot Interaksi antara A dan B