

Bab 2

Th. 10.3.4. Rao Blackwell

Jika $X_1, X_2, \dots, X_n$ mempunyai pdf gabungan $f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$ dan $S = (S_1, S_2, \dots, S_n)$ adalah statistik cukup gabungan untuk θ . Jika T adalah estimator tak bias untuk $\tau(\theta)$ dan $T^* = E(T|S)$ maka

1. T^* adalah estimator tak bias untuk $\tau(\theta)$
2. T^* adalah fungsi dari S
3. $Var(T^*) \leq Var(T)$ untuk setiap θ dan $Var(T^*) < Var(T)$ untuk beberapa θ kecuali $T^* = T$ dengan probabilitas 1

Dari Th. RBW

- Jika kita akan mencari estimator tak bias dengan variansi kecil, dibatasi dengan adanya syarat kecukupan
- Jika terdapat estimator tak bias maka akan ada fungsi yang cukup, $E[T | S]$ yang tak bias dan variansi lebih kecil dari T

Latihan

1. Jika $X_i \sim \text{iid GAM}(2, \beta)$ maka tentukan $\hat{\beta}$
2. Jika $X_i \sim \text{iid Bernoulli}(p)$
 - a. Tentukan $\hat{p}$
 - b. Apakah $\hat{p}$ UMVUE?
2. Jika $X_i \sim \text{iid N}(\mu, 9)$
 - a. Tentukan $\hat{\mu}$
 - b. Apakah $\hat{\mu}$ UMVUE?
3. Jika $X_i \sim \text{iid EXP}(\lambda)$ dan diketahui
$$\hat{\lambda}_1 = \bar{x} \text{ dan } \hat{\lambda}_2 = \frac{n\bar{x}}{n+1}$$
maka menurut Anda, manakah estimator terbaik?

Kelengkapan

Definisi 10.4.1

Keluarga fungsi densitas $\{f_T(t; \theta); \theta \in \Omega\}$ disebut dengan lengkap jika $E[u(T)] = 0$ untuk setiap $\theta \in \Omega$ berakibat $u(T) = 0$ dengan probabilitas 1 untuk setiap $\theta \in \Omega$

Statistik yang cukup, yang merupakan anggota dari keluarga *complete* (lengkap) disebut dengan *complete sufficient statistics*

Th. 10.4.1 Lehman Scheffe

Jika $X_1, X_2, \dots, X_n$ mempunyai pdf gabungan $f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$ dan S adalah statistik cukup lengkap gabungan untuk θ . Jika $T^* = l(S)$ adalah estimator tak bias untuk $\tau(\theta)$ dan fungsi dari S maka T^* adalah UMVUE $\tau(\theta)$

Definisi 6.6.4. Nitis: 320

Statistik T disebut komplit cukup untuk θ j.h.j :

1. T cukup untuk θ
2. T komplit

Contoh

1. Jika $X_i \sim \text{iid POI}(\mu)$, apakah Poisson merupakan keluarga komplit?
2. Jika $X_i \sim \text{iid EXP}(\theta)$, apakah Eksponensial merupakan keluarga komplit?
3. Jika $X_i \sim \text{iid N}(0, \theta)$, apakah distribusi tersebut komplit?
4. Jika $X_i \sim \text{iid N}(\mu, \sigma^2)$, tentukan statistik komplit cukup!
5. T merupakan statistik $\sim \text{Bernoulli}(p)$, $0 < p < 1$. Apakah T statistik komplit?
6. Tunjukkan bahwa $\text{N}(0, \sigma^2)$ merupakan distribusi tidak komplit

Definisi 10.4.2

Fungsi densitas dikatakan sebagai Kelas Eksponensial Reguler (REC : Regular Exponential Class) jika fungsinya dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$f(x; \boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} c(\boldsymbol{\theta})h(x) \exp \left[\sum_{j=1}^k q_j(\boldsymbol{\theta})l_j(x) \right], & x \in A \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}$$

dengan $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ adalah vektor k parameter tidak diketahui, jika ruang sampel parameter adalah

$$\boldsymbol{\Omega} = \{\boldsymbol{\theta} | a_i \leq \theta_i \leq b_i, i = 1, \dots, k\}$$

dan jika memenuhi 1, 2, 3a atau 3b :

1. Himpunan $A = \{x : f(x; \boldsymbol{\theta}) > 0\}$ tidak tergantung $\boldsymbol{\theta}$
2. Fungsi $q_j(\boldsymbol{\theta})$ adalah trivial, independen, kontinu terhadap θ_i
3. a. Untuk variabel random kontinu, $l'_j(x)$ linier independen
b. Untuk variabel random diskrit, $l_j(x)$ adalah fungsi non trivial x pada A dan selainnya adalah fungsi linier

Contoh 2

Jika $X_i \sim \text{iid BIN}(1, p)$ apakah distribusi Binomial termasuk REC ?

Teorema 10.4.2

Jika $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah sampel random dari anggota $\text{REC}(q_1, q_2, \dots, q_k)$ maka statistik

$$S_1 = \sum_{i=1}^n l_1(X_i), \dots, S_k = \sum_{i=1}^n l_k(X_i)$$

adalah **statistik cukup komplit** untuk $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$

Contoh 3

Jika $X_i \sim \text{iid BIN}(1, p)$ maka tentukan statistik cukup lengkap untuk p ?

Teorema 10.4.3

Jika T adalah estimator CRLB untuk $\tau(\theta)$ (ada) maka terdapat tunggal statistik cukup dan T merupakan fungsi dari statistik cukup.

Secara konversi, jika terdapat tunggal statistik cukup dan CRLB ada maka estimator CRLB ada untuk suatu $\tau(\theta)$

Teorema 10.4.4

Jika CRLB ada maka estimator CRLB akan ada untuk suatu fungsi $\tau(\theta)$

j.h.j fungsi densitas adalah anggota REC