LAST CHAPTER… ☺

KD 4

UJI HIPOTESIS

PREVIEW..

- Misal jika diketahui koin yang seimbang, apakah benar p=1/2 dengan X~Bin(1,p) jika dilempar sekali dan X~Bin (n,p) jika dilempar n kali?

- Misal pdf dari populasi

$$f(x,\boldsymbol{\theta}),\ x \in \chi \subseteq \Re,$$
$$\boldsymbol{\theta}\ \text{parameter tidak diketahui},\ \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \Re$$

- Definisi 8.1.1 (Nitis : 395)

Hipotesis adalah statemen tentang parameter tidak diketahui, θ

$H_0 : \theta \in \Theta_0$ hipotesis null

$H_1 : \theta \in \Theta_1$ hipotesis alternatif

- Hipotesis sederhana jika

$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta = \theta_1$$

θ_0, θ_1 diketahui

Hipotesis komposit satu sisi jika

$$H_0 : \theta > \theta_0 \qquad H_1 : \theta \leq \theta_1$$

Atau

$$H_0 : \theta < \theta_0 \qquad H_1 : \theta \geq \theta_1$$

Hipotesis komposit dua sisi jika

$$H_0 : \theta \neq \theta_0$$
$$H_1 : \theta \leq \theta_0 \cup \theta \geq \theta_1, \quad \theta_0 < \theta_1$$

Ruang sampel

Daerah kritis (daerah penolakan), C

Daerah non-penolakan, S-C
Daerah penerimaan

- Definisi 12.1.2

Daerah kritis dari suatu uji hipotesis adalah subset dari ruang sampel yang berhubungan dengan penolakan H0

Contoh 12.1.1

- Diketahui $X \sim N(\mu, 16)$

  X : hasil reaksi kimia

  Misal μ=10, jika mineral tertentu tidak muncul

  μ=11, jika mineral tertentu muncul

  Di ambil n sampel

Akan diuji hipotesis :

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 10$$
$$H_1 : \mu = \mu_1 = 11$$

$\bar{x}$: statistik cukup untuk μ

$$\text{Karena } \mu_1 > \mu_0 \text{ maka } C = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\middle|\, \bar{x} \geq c \right\}, \ c : \text{konstan}$$

$$\text{Tolak H}_0 \text{ jika } \bar{x} \geq c$$

$$\text{Terima } H_0 \text{ jika } \bar{x} < c$$

$$\text{Kesalahan Tipe I : Menolak H}_0 \text{ yang benar}$$

$$\text{Kesalahan Tipe II : Menerima H}_0 \text{ yang salah}$$

$$P[\text{Kesalahan Tipe I}] = \text{P}[\text{TI}] = \alpha$$

$$P[\text{Kesalahan Tipe II}] = \text{P}[\text{TII}] = \beta$$

- Menentukan c

$$c = \mu_0 + Z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 10 + Z_{1-0,05}\frac{4}{\sqrt{25}} = 11{,}316$$

- Dicari α,

$$\alpha = P\left[\bar{x} \geq c \middle| \mu = \mu_0 = 10\right]$$

$$= P\left[\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{c-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right]$$

Dicari β…

Definisi 12.1.4

Power function $\Pi(\theta)$ dari uji hipotesis adalah probabilitas menolak H0 ketika nilai parameter yang benar adalah θ

Untuk hipotesis sederhana, berlaku :

$$\boxed{\begin{array}{ll} H_0 : \theta = \theta_0 & \Rightarrow \pi(\theta_0) = P[\mathrm{TI}] = \alpha \\ H_1 : \theta = \theta_1 & \Rightarrow \pi(\theta_1) = 1 - P[\mathrm{TII}] = 1 - \beta \end{array}}$$

Contoh lain...

$X \sim N(\mu, \sigma^2), \sigma^2$ diketahui

$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu > \mu_0$

Pada tingkat signifikansi α, uji akan menolak H_0 jika

$Z_0 \geq Z_{1-\alpha}$

$$Z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \geq Z_{1-\alpha}$$

Jadi $\pi(\mu)$

$$\pi(\mu) = P\left[\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \geq Z_{1-\alpha} \middle| \mu\right]$$

$$= P\left[\frac{\bar{x} - \mu_0 + \mu - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \geq Z_{1-\alpha}\right]$$

$$= P\left[\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} - \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \geq Z_{1-\alpha}\right] = P\left[\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \geq Z_{1-\alpha} + \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right] = 1 - \Phi\left[Z_{1-\alpha} + \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right]$$

P-Value

- Ukuran α terkecil dimana H0 dapat ditolak berdasarkan nilai atau data yang diobservasi
- Contoh

$$X \sim N(\mu,16), \sigma = 4$$

$$\mathrm{H}_0 : \mu = 10$$

$$H_1 : \mu > 10$$

$$\text{misal } \bar{x} = 11.4$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\ value &= \mathrm{P}\left[\bar{x} \geq 11.4 \middle| \mu = 10\right] \\
&= 1 - \mathrm{P}\left[\bar{x} < 11.4 \middle| \mu = 10\right] \\
&= 1 - \mathrm{P}\left[\frac{\bar{x} - 10}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{11.4 - 10}{\sigma/\sqrt{n}}\right] \\
&= 1 - \mathrm{P}\left[z < \frac{11.4 - 10}{\sigma/\sqrt{n}}\right] \\
&= 1 - \Phi(1.75) \\
&= 1 - 0.9599 \\
&= 0.0401
\end{aligned}$$