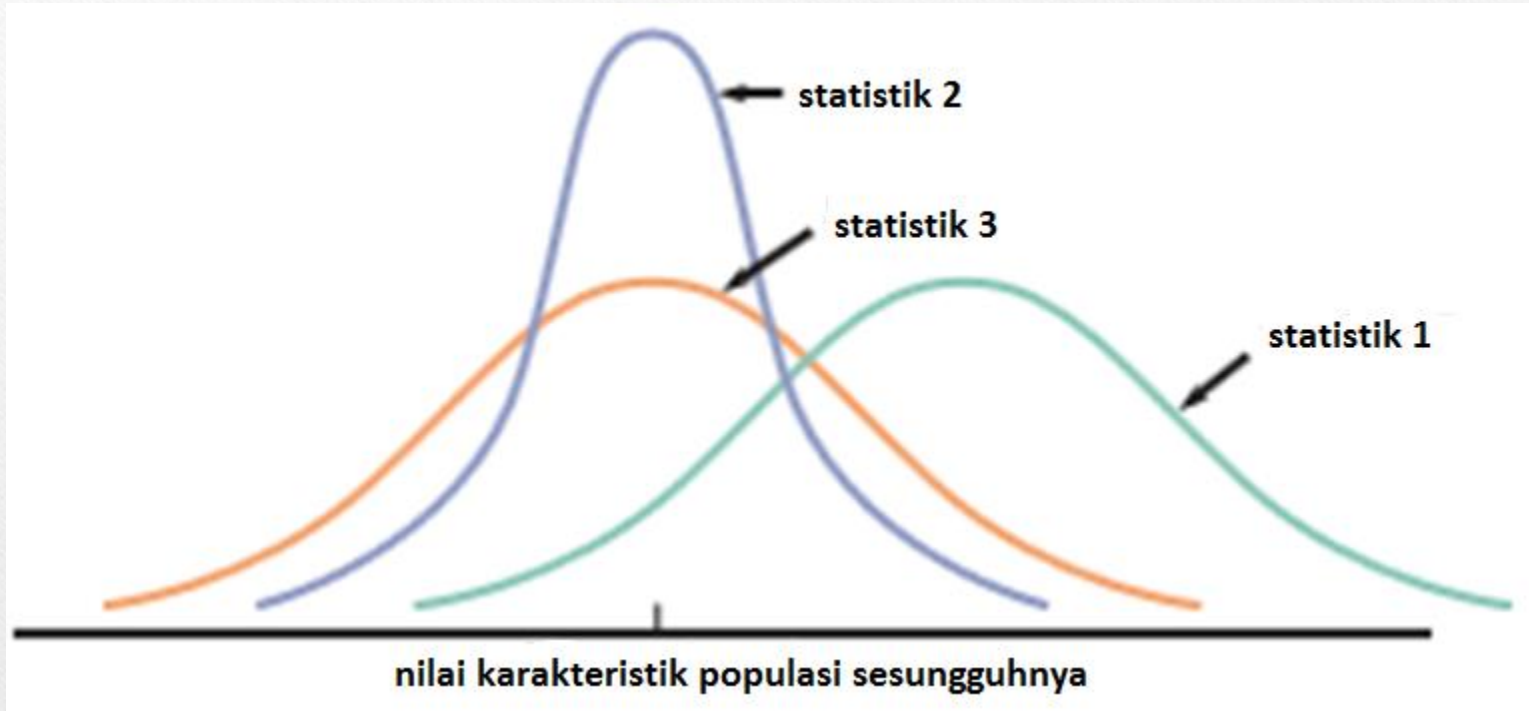


BAB 3

ESTIMASI

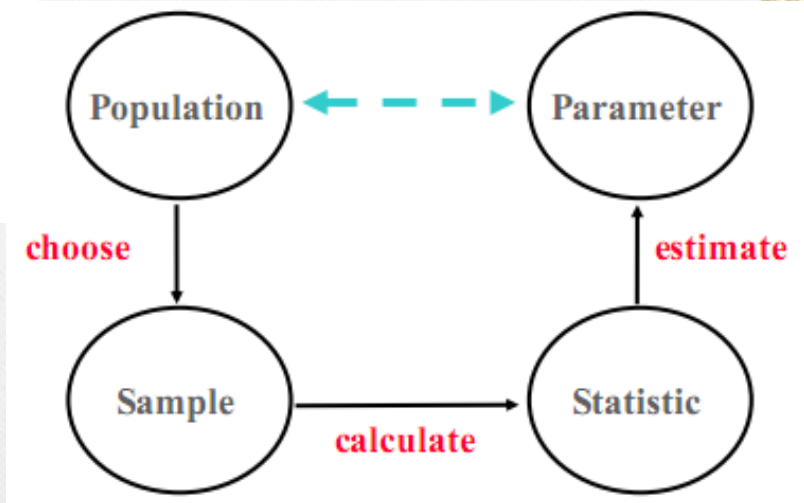
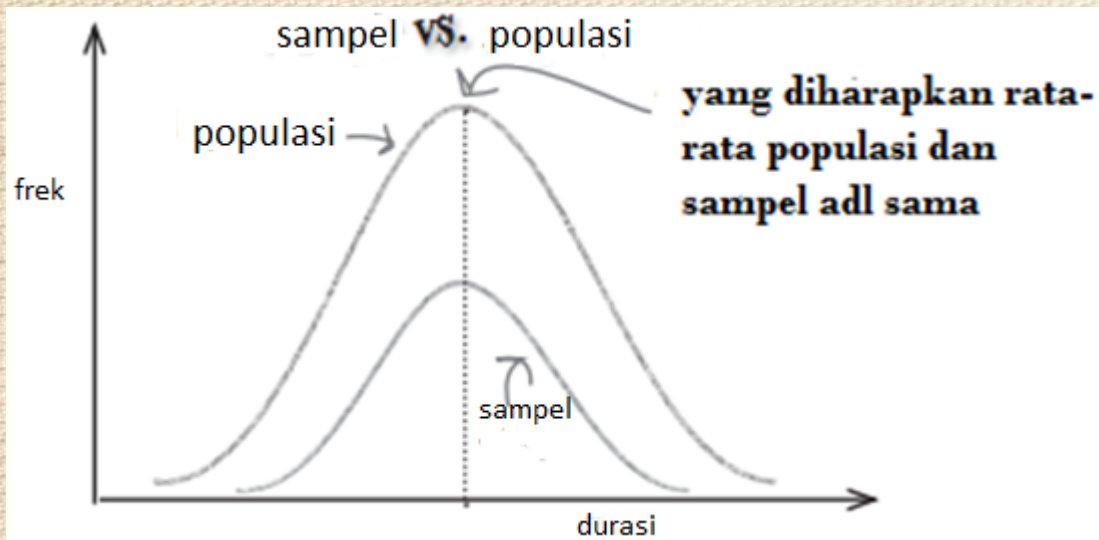
Review...

Tiga statistik diukur sebagai estimasi parameter dari suatu populasi
Distribusi sampling dari tiga statistik seperti Gambar di bawah ini

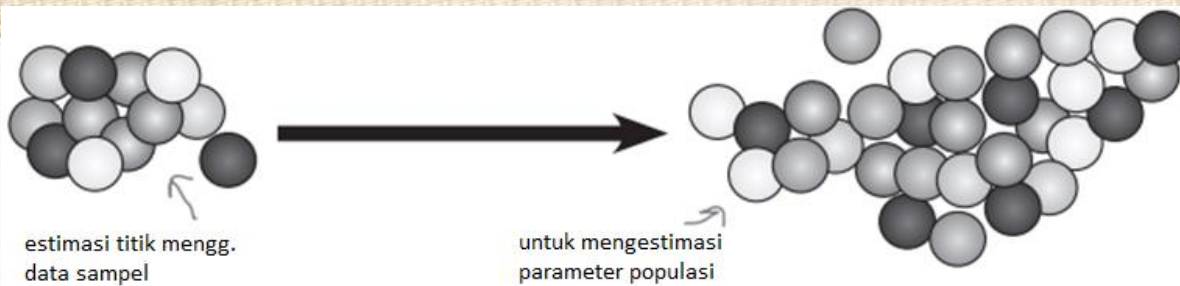


Menurut Anda, statistik mana yg paling dapat menjadi estimasi dari parameter populasi?

Ilustrasi



- Mungkin rata-ratanya tidaklah sama tapi estimasi terbaik dapat ditentukan
- Rata-rata sampel $\rightarrow$ estimator titik untuk rata-rata populasi
 - $\rightarrow$ Artinya jika dihitung sampel data akan mengestimasi rata-rata populasi



- Estimator titik dapat menghasilkan nilai pendekatan suatu parameter populasi
- Estimasi titik dari parameter populasi θ adalah nilai tunggal, dinotasikan dengan : $\hat{\theta}$

Misalkan suatu variabel random berdistribusi Normal dengan rata-rata, μ tidak diketahui maka rata-rata sampelnya dapat dinotasikan: $\hat{\mu} = \bar{X}$

Ilustrasi :

Misalkan variabel random X berdistribusi Normal dengan rata-rata μ tidak diketahui. Misalkan diambil $x_1=25$, $x_2=30$, $x_3=29$ dan $x_4=31$, maka dapat diestimasi rata-ratanya adalah

$$\bar{x} = \frac{25 + 30 + 29 + 31}{4} = 28.75$$

Beberapa estimasi titik

untuk μ , estimasinya adalah $\hat{\mu} = \bar{x}$, disebut dengan rata - rata sampel

untuk σ^2 , estimasinya adalah $\hat{\sigma}^2 = s^2$, disebut dengan variansi sampel

untuk p , estimasinya adalah $\hat{p}$, disebut dengan proporsi sampel

untuk $\mu_1 - \mu_2$, estimasinya adalah $\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$, merupakan selisih rata - rata dari dua sampel random independen

untuk $p_1 - p_2$, estimasinya adalah $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ merupakan selisih proporsi dari dua sampel random independen

Estimasi titik untuk variansi

Population variance $\rightarrow \sigma^2 = \frac{\sum (x - \mu)^2}{n}$ $\leftarrow$ Population mean
 n $\leftarrow$ Size of the population

Point estimator
for the
population
variance $\rightarrow \hat{\sigma}^2 = s^2$

atau

$$s^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Estimator for the
population variance $\rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}$ $\leftarrow$ Take each item in the sample, subtract the sample mean,
square the result, then add the lot together.
 $n - 1$ $\leftarrow$ Divide by the number in the sample minus 1.

Estimasi untuk Proporsi

- Jika X menggambarkan jumlah sukses dalam suatu populasi maka X mengikuti distribusi $\text{Bin}(n, p)$
- Misal akan diestimasi rata-rata populasi ???
- Estimasi rata-rata populasi $\rightarrow$ rata-rata sampel
- Proporsi sukses dalam populasi $\rightarrow$ proporsi sukses dalam sampel

Point estimator for the proportion of successes in the population $\rightarrow \hat{p} = p_s \leftarrow$ Proportion of successes in the sample

dengan

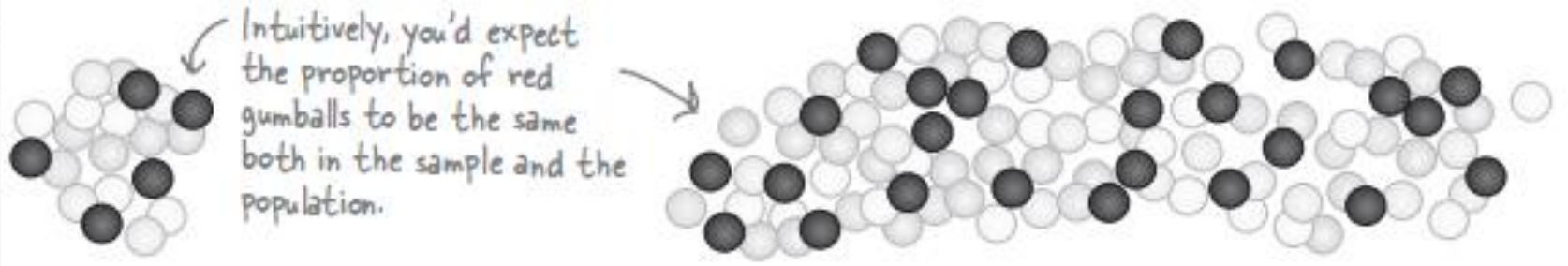
$$\hat{p} = \frac{X}{n},$$



Proporsi sampel

Distribusi sampling proporsi

Rata-rata & Variansi dari P_s



$$E(P_s) = E\left(\frac{X}{n}\right)$$

$$= \frac{E(X)}{n}$$

$$= \frac{np}{n} \leftarrow E(X) = np$$

$$= p$$

$$\text{Var}(P_s) = \text{Var}\left(\frac{X}{n}\right)$$

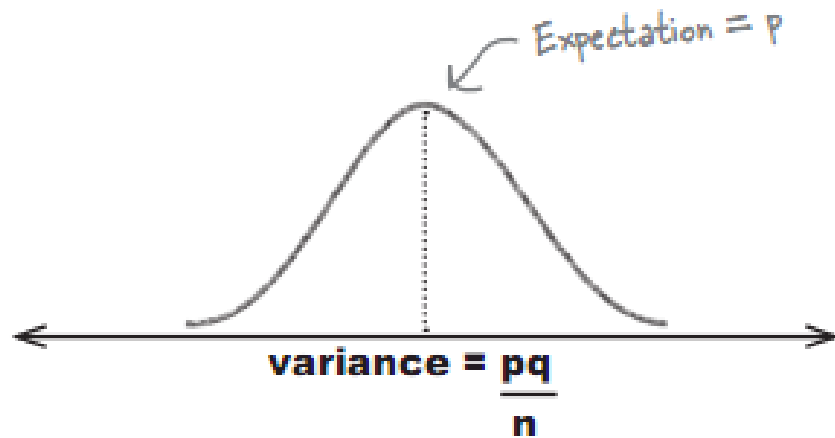
$$= \frac{\text{Var}(X)}{n^2} \leftarrow \begin{array}{l} \text{This comes from } \text{Var}(aX) = a^2\text{Var}(X). \\ \text{In this case, } a = 1/n \end{array}$$

$$= \frac{npq}{n^2} \leftarrow \text{Var}(X) = npq$$

$$= \frac{pq}{n}$$

jadi...

- Distribusi P_s tergantung dari n ...

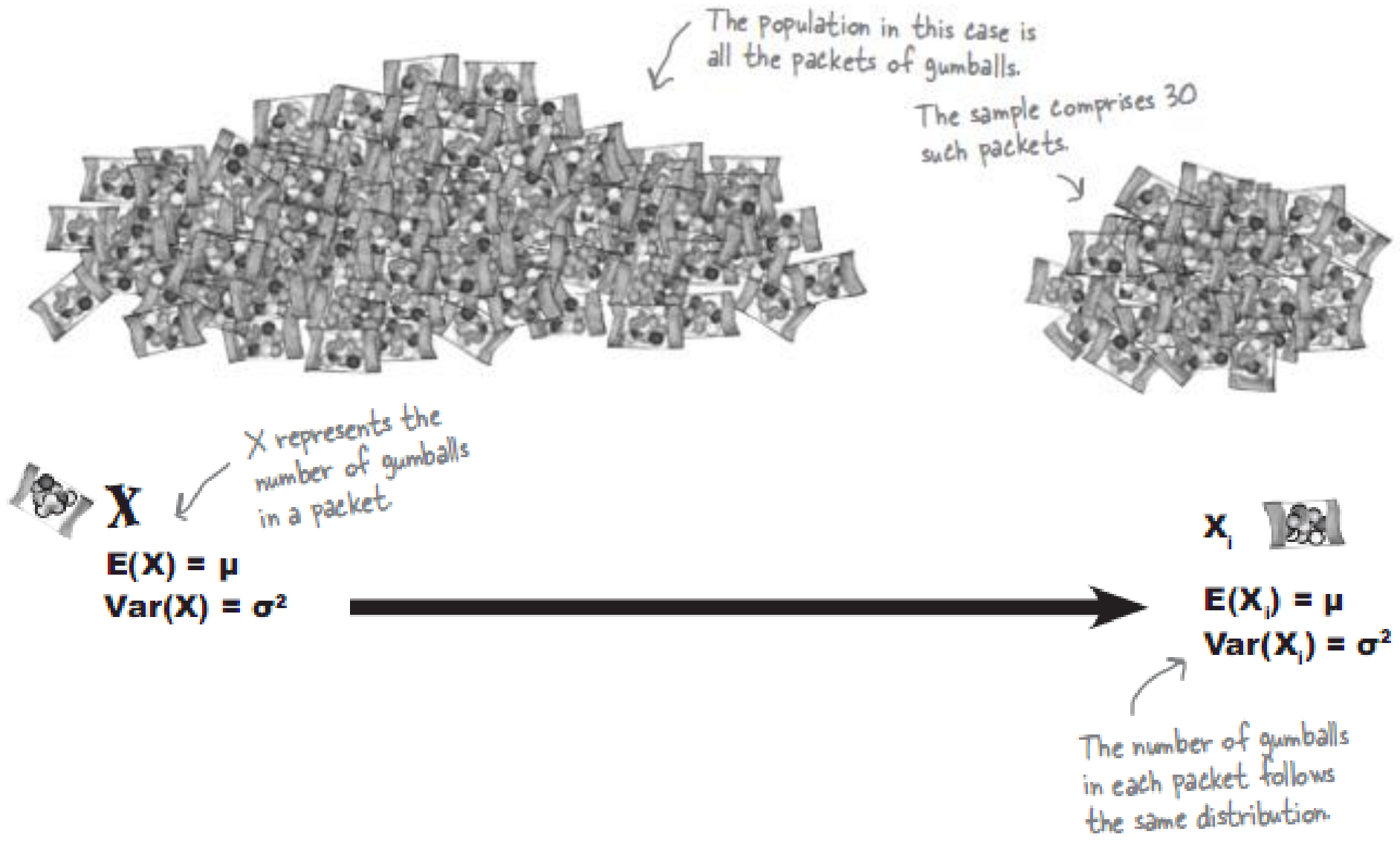


- Jika n bertambah besar (ukuran besar > 30) maka distribusi P_s akan mengikuti distribusi Normal, atau

$$P_s \sim N\left(p, \frac{pq}{n}\right)$$

Distribusi sampling untuk distribusi Normal

• contoh



Sample of X



X_1  X_n 

$$E(X_1) = \mu$$

$$\text{Var}(X_1) = \sigma^2$$

$$E(X_n) = \mu$$

$$\text{Var}(X_n) = \sigma^2$$

Each X_i is an independent observation of X , so each packet has the same expectation and variance for the number of gumballs.

This is the mean of the sample, the mean number of gumballs in the packets.

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right)$$

These two expressions are the same, just written in a different way.

$$= E\left(\frac{1}{n} X_1 + \frac{1}{n} X_2 + \dots + \frac{1}{n} X_n\right)$$

$$= E\left(\frac{1}{n} X_1\right) + E\left(\frac{1}{n} X_2\right) + \dots + E\left(\frac{1}{n} X_n\right)$$

We can split this into n separate expectations because $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Every expectation includes $1/n$, so we can take it out of the expression. This comes from $E(aX) = aE(X)$.

$$\rightarrow = \frac{1}{n} (E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n))$$

$\bar{X}$

$$\text{Var}(\bar{X}) = \text{Var}\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right)$$

$$= \text{Var}\left(\frac{1}{n}X_1 + \frac{1}{n}X_2 + \dots + \frac{1}{n}X_n\right)$$

$$= \text{Var}\left(\frac{1}{n}X_1\right) + \text{Var}\left(\frac{1}{n}X_2\right) + \dots + \text{Var}\left(\frac{1}{n}X_n\right)$$

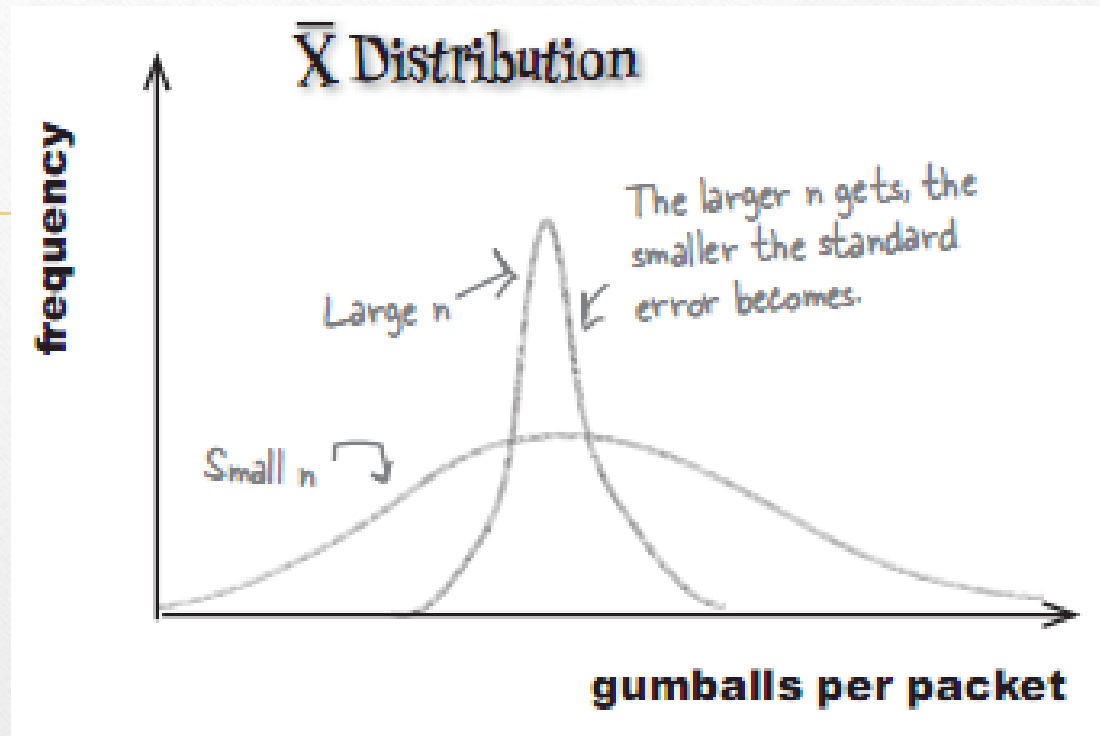
$$= \left(\frac{1}{n}\right)^2 (\text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots + \text{Var}(X_n))$$

$$= \frac{1}{n^2} (\sigma^2 + \sigma^2 + \dots + \sigma^2)$$

$$= n \times \frac{1}{n^2} \sigma^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{n}$$

So...



If $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, then $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

These are the mean and variance of $\bar{X}$ that we found earlier.

Teorema Limit Pusat (CLT)

Jika sampel diambil dari suatu populasi dg distribusi non normal dan ukuran sampel besar maka rata-rata $\bar{X}$ diaproksimasikan berdistribusi Normal dengan rata-rata dan variansi populasi μ, σ^2

adalah
$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Latihan

1. Misalkan $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ estimator untuk θ . Diketahui $E[\hat{\theta}_1] = \theta, E[\hat{\theta}_2] = \frac{\theta}{2}, V(\hat{\theta}_1) = 10, V(\hat{\theta}_2) = 4$.
Menurut Anda manakah estimator terbaik? Jelaskan!
-

2. Data diketahui :

425 431 416 419 421 436 418 410 431 433 423 426 410 435 436 428 411 426
409 437 422 428 413 416

- a. Hitung estimasi titik untuk rata-rata, standar deviasi
b. Hitung estimasi titik untuk proporsi data yang bernilai lebih dari 430

Peny:



Soal tambahan

Misalkan ada sampel acak berukuran $2n$ dari suatu populasi yang dinotasikan dengan X , dan diketahui $E[X] = \mu$, $V(X) = \sigma^2$. Jika $\bar{X}_1 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_i$ dan $\bar{X}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ merupakan dua estimator untuk μ maka menurut Anda manakah estimator yang terbaik untuk μ ? Jelaskan jawabanmu!